2. I connettivi booleani

Sommario

- Nella lezione precedente abbiamo definito il concetto di formula atomica
- In questa lezione mostriamo come le formule atomiche possano essere combinate fra loro utilizzando dei connettivi per ottenere formule complesse

Università della Svizzera italiana | III-2 | 2

I connettivi booleani

- Il linguaggio ordinario è molto ricco di connettivi, ovvero di termini logici che consentono di comporre enunciati complessi a partire da enunciati più semplici, come ad esempio:

  non, *e*, *o*, *ma*, *invece di,* ...

- Alcuni di questi connettivi, denominati connettivi booleani in onore di George Boole, sono particolarmente semplici da trattare e di uso molto generale:
  - negazione: *non ...* $\neg$
  - congiunzione: *... e ...* $\wedge$
  - disgiunzione: *... o ...* $\vee$
  - condizionale: *se ... allora ...* $\rightarrow$
  - bicondizionale: *... se e solo se ...* $\leftrightarrow$

Università della Svizzera italiana | III-2 | 3

La negazione

- Il simbolo $\neg$ posto di fronte a una formula la trasforma nella sua negazione:

  Biondo(Andrea) *Andrea è biondo*

  $\neg$Biondo(Andrea) *Andrea non è biondo*

  La formula negata può anche essere letta come

  non è vero che Andrea sia biondo

- La negazione è un connettivo unario, perché si applica a una singola formula
- È possibile iterare più volte la negazione:

  $\neg\neg$Biondo(Andrea)

  non è vero che Andrea non sia biondo

Condizioni di verità della negazione

- Un enunciato negato $\neg\alpha$ è vero se l'enunciato non negato α è falso, ed è falso se l'enunciato α è vero
- Dai lavori di Boole in poi si indica il valore di verità *falso* con 0 e il valore di verità *vero* con 1
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della negazione:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

La congiunzione

- La congiunzione di due formule si ottiene ponendo il simbolo $\wedge$ fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

  [Biondo(Andrea) $\wedge$ Bruno(Barbara)]

  Andrea è biondo e Barbara è bruna

  (Attenzione: le costanti predicative non sono aggettivi dell'italiano, e quindi non si ha concordanza di genere)

- La congiunzione è un connettivo binario, perché si applica a due formule

  Quando più di due frasi sono poste in congiunzione si usa più volte la congiunzione binaria:

  [Biondo(Barbara) $\wedge$ [Alto(Andrea) $\wedge$ Bruno(Andrea)]]

Università della Svizzera italiana | III-2 | 6

Uso di più connettivi diversi

- È possibile combinare fra loro la congiunzione e la negazione (e anche tutti gli altri connettivi che vedremo in seguito):

  $\neg$[Sciocco(Andrea) $\wedge$ $\neg$Capace(Andrea)]

  non è vero che Andrea sia sciocco e incapace

Università della Svizzera italiana | III-2 | 7

Condizioni di verità della congiunzione

- Una congiunzione $[\alpha \wedge \beta]$ è vera se entrambi gli enunciati α e β sono veri ed è falsa in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della congiunzione:

α	β	$[\alpha \wedge \beta]$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La disgiunzione

- La disgiunzione di due formule si ottiene ponendo il simbolo $\vee$ fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

  [Piove $\vee$ FaFreddo]

  piove o fa freddo

- La disgiunzione s'intende inclusiva, nel senso che non esclude la verità di entrambi gli enunciati posti in disgiunzione (*or* inclusivo)

  La disgiunzione esclusiva (*xor*) si può comunque esprimere nel modo seguente:

  [[Piove $\vee$ FaFreddo] $\wedge \neg$[Piove $\wedge$ FaFreddo]]

Condizioni di verità della disgiunzione

- Una disgiunzione $[\alpha \vee \beta]$ è falsa se entrambi gli enunciati α e β sono falsi ed è vera in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della disgiunzione:

α	β	$[\alpha \vee \beta]$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Università della Svizzera italiana III-2 10

Il condizionale

- Il condizionale di due formule si ottiene ponendo il simbolo $\rightarrow$ fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

  [Parte(Andrea) $\rightarrow$ Triste(Barbara)]

  se Andrea parte, allora Barbara è triste

  oppure

  Barbara è triste se Andrea parte

- In un condizionale $[\alpha \rightarrow \beta]$ l'enunciato α è detto l'antecedente e l'enunciato β è detto il conseguente
- In logica si studiano vari tipi di condizionale, ma l'unico tipo di cui ci occupiamo in questo corso è il cosiddetto condizionale materiale

Università della Svizzera italiana III-2 11

Il condizionale materiale

- Considieriamo di nuovo la frase

  se Andrea parte, allora Barbara è triste

  [Parte(Andrea) $\rightarrow$ Triste(Barbara)]

  In quali condizioni chi enuncia questa frase dice il vero?

- Abbiamo quattro casi possibili:
  - Andrea parte, Barbara è triste: il parlante ha detto il vero
  - Andrea parte, Barbara non è triste: il parlante ha mentito
  - Andrea non parte, Barbara è triste: il parlante non ha mentito, quindi ha detto il vero
  - Andrea non parte, Barbara non è triste: il parlante non ha mentito, quindi ha detto il vero

Università della Svizzera italiana | III-2 | 12

Condizioni di verità del condizionale

- Quindi un condizionale (materiale) è falso se l'antecedente è vero e il conseguente è falso, ed è vero in caso contrario
- Abbiamo la seguente tavola di verità del condizionale (materiale):

α	β	$[\alpha \to \beta]$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Università della Svizzera italiana | III-2 | 13

Il bicondizionale

- Il bicondizionale di due formule si ottiene ponendo il simbolo $\leftrightarrow$ fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

  [Triste(Barbara) $\leftrightarrow$ Parte(Andrea)]

  Barbara è triste se, e solo se, Andrea parte
- Il bicondizionale può essere visto come la congiunzione di due condizionali in senso opposto:

  [[Parte(Andrea) $\to$ Triste(Barbara)]
  $\wedge$ [Triste(Barbara) $\to$ Parte(Andrea)]]
- In questo corso ci occupiamo solo del bicondizionale materiale, definito come la congiunzione di due condizionali materiali in senso opposto

Università della Svizzera italiana | III-2 | 14

Condizioni di verità del bicondizionale

- Un bicondizionale (materiale) $[\alpha \leftrightarrow \beta]$ è vero se gli enunciati α e β hanno lo stesso valore di verità ed è falso in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità del bicondizionale (materiale):

α	β	$[\alpha \leftrightarrow \beta]$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Il bicondizionale ci dà un modo più semplice per esprimere la disgiunzione esclusiva (*xor*):

  [Piove $\leftrightarrow$ $\neg$FaFreddo]

Università della Svizzera italiana | III-2 | 15

Valutazione di una formula complessa

- Valutare una formula significa calcolare il suo valore di verità in un mondo del discorso
- Consideriamo ad esempio la formula

  [Inverno $\rightarrow$ [Piove $\vee$ Nevica]]

  e supponiamo che nel mondo del discorso *sia inverno*, *non piova* e *nevichi*
- Per la valutazione basta utilizzare le tavole di verità viste in precedenza (per brevità le costanti predicative sono qui rappresentate con la sola iniziale):

I	P	N	[P $\vee$ N]	[I $\rightarrow$ [P $\vee$ N]]
1	0	1	1	1

Equivalenze

- Due formule α e β pur essendo diverse possono risultare equivalenti, nel senso che le loro condizioni di verità sono le stesse (ovvero risultano ambedue vere o ambedue false negli stessi casi)
- Ecco alcune equivalenze importanti:

$\neg\neg\alpha$	equivale a	α
$\neg[\alpha \wedge \beta]$	equivale a	$[\neg\alpha \vee \neg\beta]$
$\neg[\alpha \vee \beta]$	equivale a	$[\neg\alpha \wedge \neg\beta]$
$[\alpha \rightarrow \beta]$	equivale a	$[\neg\alpha \vee \beta]$
$\neg[\alpha \rightarrow \beta]$	equivale a	$[\alpha \wedge \neg\beta]$

- Queste equivalenze si dimostrano facilmente utilizzando le tavole di verità

Dimostrazione di una equivalenza

- Dimostriamo ad esempio che:

  $[\alpha \rightarrow \beta]$ equivale a $[\neg\alpha \vee \beta]$

- Utilizzando le tavole di verità abbiamo che:

α	β	$[\alpha \rightarrow \beta]$	$\neg\alpha$	$[\neg\alpha \vee \beta]$
0	0	**1**	1	**1**
0	1	**1**	1	**1**
1	0	**0**	0	**0**
1	1	**1**	0	**1**

Università della Svizzera italiana | III-2 | 18

Concetti importanti

- Connettivi booleani
- Tavole di verità
- Valutazione di una formula complessa
- Equivalenza di due formule