3. I quantificatori

Sommario

- Nella lezione precedente abbiamo introdotto i connettivi booleani, che sono un tipo di termini logici
- In questa lezione definiremo un altro tipo di termini logici: i quantificatori

III-3

2

Quantificatori

- I quantificatori sono termini logici che specificano quanti individui hanno una determinata proprietà:

  tutti gli uomini sono mortali

  qualche ragazza è bionda

  nessun asino vola

  quasi tutti amano la musica

  molti ragazzi fanno sport

  pochi bambini suonano il violino

  alla maggior parte dei francesi piace il vino

  la Repubblica di San Marino è governata da due Capitani Reggenti

  alla mia festa inviterò al massimo dieci amici

  nella mandria c'erano almeno duecento bisonti

III-3

3

Quantificatori netti e sfumati

- I quantificatori si possono distinguere in quantificatori netti (*crisp*) e quantificatori sfumati (*fuzzy*)
- Quantificatori netti:

  tutti, qualche, nessuno ...

  al massimo n, almeno n, esattamente n ...
  (con n = 0, 1, 2, *...)*
- Quantificatori sfumati:

  quasi tutti, quasi nessuno ...

  molti, pochi ...

  la maggior parte di, una minima parte di ...
- In questo corso ci limiteremo a trattare alcuni quantificatori netti (altri quantificatori netti saranno introdotti nella lezione IV-4)

III-3
4

Quantificazione esistenziale

- Se α è una formula qualsiasi, la formula

  $\exists x\, \alpha$

  si legge *esiste (almeno) un x tale che* α
  oppure *per qualche x,* α
- Il simbolo logico $\exists$ è detto quantificatore esistenziale
- Ad esempio, la frase

  c'è almeno una ragazza bionda

  si trasforma prima in

  per qualche x: x è una ragazza e x è bionda

  e poi si rappresenta con la formula

  $\exists x\, [\text{Ragazza}(x) \wedge \text{Biondo}(x)]$

III-3
5

Quantificazione esistenziale (2)

- Attenzione: è spontaneo leggere la formula

  $\exists x\, \text{Biondo}(x)$

  come *qualcuno è biondo*, dato che "biondo" si usa solitamente per le persone
- In realtà la formula non ci dice che *x* sia una persona

  Per questo motivo la lettura corretta della formula non è *qualcuno è biondo*, bensì

  qualcosa è biondo
- La frase italiana *qualcuno è biondo* è invece resa correttamente dalla formula

  $\exists x\, [\text{Persona}(x) \wedge \text{Biondo}(x)]$

III-3
6

Condizioni di verità

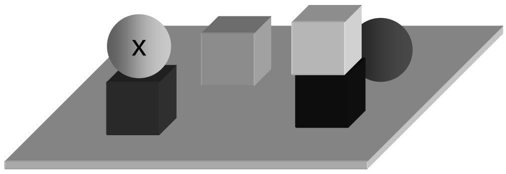
- Una formula del tipo ∃x α è vera nel mondo del discorso se la formula α risulta vera per almeno un possibile referente di x, ed è falsa in caso contrario
- Ad esempio, la formula

  ∃x Sfera(x)

  è vera nel mondo del discorso indicato, come si vede e assegnando ad x il referente indicato e considerando che in tal caso la formula

  Sfera(x)

  risulta vera



III-3
7

Condizioni di verità (2)

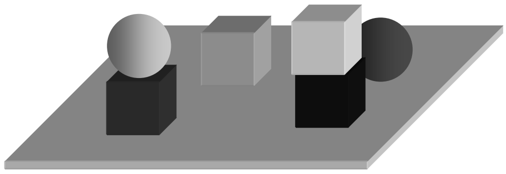
- Nello stesso mondo del discorso la formula

  ∃x [Sfera(x) ∧ Verde(x)]

  è falsa, perché non è possibile assegnare un referente ad x in modo tale che la formula

  [Sfera(x) ∧ Verde(x)]

  risulti vera



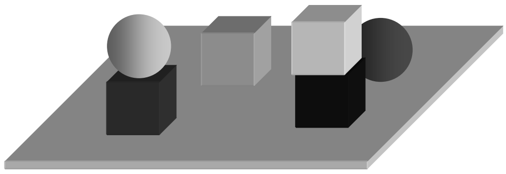
III-3
8

Quantificatori incassati

- È possibile incassare più quantificatori:

  c'è un cubo verde sul ripiano

  $\exists x \exists y$ [Cubo(x) $\wedge$ Verde(x) $\wedge$ Ripiano(y) $\wedge$ Su(x,y)]



III-3
9

Quantificazione universale

- Se α è una formula qualsiasi, la formula

  $\forall x\, \alpha$

  si legge *per ogni x:* α
  oppure *per tutti gli x:* α

- Il simbolo logico $\forall$ è detto quantificatore universale
- Ad esempio, la frase

  (tutti) i corvi sono neri

  si trasforma prima in

  per ogni x: se x è un corvo, allora x è nero

  e poi si rappresenta con la formula

  $\forall x$ [Corvo(x) $\rightarrow$ Nero(x)]

III-3
10

Quantificazione universale (2)

- Analogamente al caso del quantificatore esistenziale, è spontaneo leggere la formula

  $\forall x\, \text{Biondo}(x)$

  come *tutti sono biondi*
- In realtà la lettura corretta della formula è

  tutto è biondo

  oppure

  ogni cosa è bionda
- La frase italiana *tutti sono biondi* è invece resa correttamente dalla formula

  $\forall x\, [\text{Persona}(x) \rightarrow \text{Biondo}(x)]$

III-3
11

Condizioni di verità

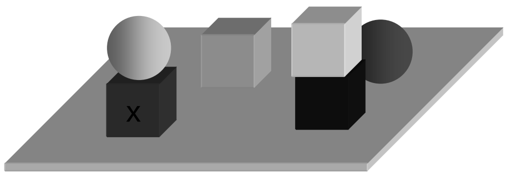
- Una formula del tipo $\forall x\, \alpha$ è vera nel mondo del discorso se la formula α risulta vera per qualunque possibile referente di x, ed è falsa in caso contrario
- Ad esempio, la formula

  $\forall x\, \text{Sfera}(x)$

  è falsa nel mondo del discorso indicato, come si vede assegnando ad x il referente indicato e considerando che in tal caso la formula

  $\text{Sfera}(x)$

  risulta falsa



III-3
12

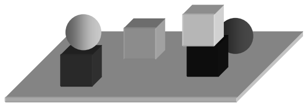
Condizioni di verità (2)

- Nello stesso mondo del discorso la formula

  $\forall x\, [\mathrm{Sfera}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Rosso}(x)]$

  è vera, perché qualunque referente venga assegnato a x la formula

  $[\mathrm{Sfera}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Rosso}(x)]$



  risulta vera; infatti:
  - quando il referente di x è una delle sfere, sia l'antecedente che il conseguente del condizionale sono veri e quindi il condizionale è vero (per la tavola di verità del condizionale, III-2:12)
  - quando invece il referente di x è un cubo o il ripiano, l'antecedente del condizionale è falso e quindi il condizionale è vero (sempre per la tavola di verità del condizionale)

III-3
13

La dualità dei quantificatori

- Fra il quantificatore universale e il quantificatore esistenziale sussiste una particolare relazione logica, detta dualità:

  $\forall x\, \alpha$ è equivalente a $\neg \exists x \neg \alpha$

- Ad esempio,

  $\forall x\, \mathrm{Buono}(x)$ *tutto è buono*

  è equivalente a

  $\neg \exists x \neg \mathrm{Buono}(x)$ *non esiste qualcosa che non sia buono*

La dualità dei quantificatori (2)

- Ricordando che

  $\neg\neg\alpha$ equivale a α

  abbiamo anche che:

  $\neg\forall x\,\alpha$ equivale a $\neg\neg\exists x\,\neg\alpha$ e quindi a $\exists x\,\neg\alpha$
  $\forall x\,\neg\alpha$ equivale a $\neg\exists x\,\neg\neg\alpha$ e quindi a $\neg\exists x\,\alpha$
  $\neg\forall x\,\neg\alpha$ equivale a $\neg\neg\exists x\,\neg\neg\alpha$ e quindi a $\exists x\,\alpha$

- Ad esempio:

  $\neg\forall x$ Buono(x) *non tutto è buono*

  equivale a

  $\exists x\,\neg$Buono(x) *esiste qualcosa che non è buono*

  e così via

Quantificatori e connettivi

- Molto spesso il quantificatore esistenziale si applica a una congiunzione, come in

  $\exists x$ [Ragazza(x) $\wedge$ Biondo(x)]
  qualche ragazza è bionda

  e il quantificatore universale a un condizionale, come in

  $\forall x$ [Uomo(x) $\rightarrow$ Mortale(x)]
  tutti gli uomini sono mortali

III-3
16

Quantificatori e connettivi (2)

- Tuttavia è del tutto possibile che avvenga anche il contrario:

  $\forall x$ [Bello(x) $\wedge$ Buono(x)]
  tutto è bello e buono

  $\exists x$ [Bello(x) $\rightarrow$ Buono(x)]
  c'è qualcosa che se è bello, è anche buono

III-3
17

La presupposizione di esistenza

- Nel mondo reale, qual è il valore di verità della formula

  $\forall x$ [Marziano(x) $\rightarrow$ Verde(x)]
  tutti i marziani sono verdi

  dando per scontato che non esistono marziani?
- Tenendo conto delle condizioni di verità di una formula del tipo $\forall x\, \alpha$ (lucido 11) la formula risulta vera

  Infatti:
  - dato che non ci sono marziani, per ogni possibile referente assegnato a x nel mondo del discorso risulta falso l'antecedente del condizionale [Marziano(x) $\rightarrow$ Verde(x)]
  - quindi per ogni possibile referente assegnato a x nel mondo del discorso il condizionale è vero

III-3
18

La presupposizione di esistenza (2)

- Perché il fatto che la formula

  $\forall x\ [\text{Marziano}(x) \rightarrow \text{Verde}(x)]$

  sia vera ci sembra controintuitivo?
- Perché nel linguaggio ordinario la quantificazione universale porta con sé una presupposizione di esistenza: quando asseriamo che

  tutti i marziani sono verdi

  presupponiamo che esista almeno un marziano
- Nella logica, invece, e in generale nel discorso matematico, la quantificazione universale non introduce una presupposizione d'esistenza

III-3
19

La presupposizione di esistenza (3)

- Nel seguito, per semplicità, continueremo a tradurre la quantificazione universale del linguaggio ordinario con il quantificatore $\forall$
- Qualora fosse importante dar conto della presupposizione d'esistenza implicita in un enunciato come

  tutti i marziani sono verdi

  dovremmo adottare una traduzione più complessa, che metta in evidenza sia l'asserzione universale, sia la presupposizione d'esistenza:

$$[\underbrace{\forall x\ [\text{Marziano}(x) \rightarrow \text{Verde}(x)]}_{\text{asserzione universale}} \wedge \underbrace{\exists x\, \text{Marziano}(x)}_{\text{presupposizione d'esistenza}}]$$

III-3
20

Gli operatori logici

- I connettivi booleani e i quantificatori sono termini logici
- Sono anche detti operatori logici, in quanto consentono di costruire formule logiche complesse a partire da formule atomiche, così come gli operatori aritmetici consentono di costruire espressioni aritmetiche complesse a partire da elementi atomici (numeri, variabili, costanti simboliche)

  Ad esempio:

  $(3 - 2) \times 5$
  $-a + 2b$

III-3
21

Concetti importanti

- Quantificatori netti e quantificatori sfumati
- Quantificatore esistenziale e quantificatore universale
- Dualità fra il quantificatore esistenziale e il quantificatore universale
- Quantificazione universale e presupposizione d'esistenza