



4. L'uguaglianza



- Nelle lezioni precedenti abbiamo definito un certo numero di termini logici (connettivi, quantificatori) che sono anche operatori logici
- In questa lezione ci occuperemo di un termine logico che non è un operatore logico, bensì una costante predicativa speciale: l'uguaglianza

Introdurremo inoltre nuovi operatori logici, tutti riducibili agli operatori già definiti e all'uguaglianza



III-4

2

L'uguaglianza

- La copula del linguaggio ordinario (è) può essere usata con funzioni diverse
- Nei casi considerati fino ad ora la copula indicava l'applicazione di un predicato a un argomento

Andrea è biondo

Biondo(Andrea)

- Nel caso seguente, invece, la copula esprime uguaglianza o identità:

la Gioconda è la Monna Lisa

Gioconda = MonnaLisa



III-4

3

L'uguaglianza (2)

- Più precisamente, la formula
Gioconda = MonnaLisa
dice che le due costanti individuali Gioconda e MonnaLisa sono coreferenziali, ovvero fanno riferimento allo stesso individuo del mondo del discorso
- Non sarebbe corretto dire che la formula esprime l'identità di due individui: ci sono sì due termini referenziali (le costanti individuali Gioconda e MonnaLisa), ma un solo individuo (il famoso quadro) che è il referente di ambedue i termini nel mondo del discorso





- Il simbolo $=$ di uguaglianza è una costante predicativa a due posti d'argomento

Seguendo le regole della nostra grammatica dovremmo quindi scrivere formule del tipo

$$=(x,y)$$

- In omaggio alla notazione tradizionale si usa invece la "notazione infissa"

$$(x = y) \quad \text{oppure} \quad x = y$$

Si scrive inoltre

$$(x \neq y) \quad \text{oppure} \quad x \neq y$$

anziché $\neg(x = y)$

- Attenzione: l'uguaglianza è sia un termine predicativo (una costante predicativa), sia un termine logico (come i connettivi e i quantificatori)



- Una formula $(R_1 = R_2)$, formata dalla costante predicativa diadica $=$ applicata a due termini referenziali R_1 ed R_2 , è vera se R_1 ed R_2 hanno lo stesso referente nel mondo del discorso ed è falsa in caso contrario

- Ad esempio, la formula atomica

$$\text{Gioconda} = \text{MonnaLisa}$$

è vera se nel mondo del discorso la costante individuale Gioconda e la costante individuale MonnaLisa hanno lo stesso referente



- Utilizzando l'uguaglianza e altri termini logici è possibile esprimere il concetto di esistenza e unicità
- Ad esempio, l'enunciato

c'è un solo cubo o esiste esattamente un cubo

si può trasformare in

esiste (almeno) un x tale che:

x è un cubo e per ogni y:

se (anche) y è un cubo, allora y è uguale a x

ovvero

$$\exists x [\text{Cubo}(x) \wedge \forall y [\text{Cubo}(y) \rightarrow (y = x)]]$$

Nel seguito abbrevieremo questa formula come

$$=1x \text{ Cubo}(x) \quad (\text{oppure } \exists!x \text{ Cubo}(x))$$



- L'enunciato

ci sono almeno due cubi

si può trasformare in

esiste (almeno) un x e (almeno) un y tali che:

x è un cubo e y è un cubo e $x \neq y$

ovvero

$$\exists x \exists y [\text{Cubo}(x) \wedge [\text{Cubo}(y) \wedge (x \neq y)]]$$

che abbrevieremo in

$$\geq 2x \text{ Cubo}(x)$$



Quantificatori numericamente delimitati (2)

- Più in generale utilizzando l'uguaglianza e altri termini logici è possibile scrivere formule che esprimono tutti i quantificatori esistenziali numericamente delimitati
 - Per le abbreviazioni useremo i simboli:
 - $\leq nx \dots$ *esistono al massimo n x tali che ...*
 - $\geq nx \dots$ *esistono almeno n x tali che ...*
 - $= nx \dots$ *esistono esattamente n x tali che ...*
- con $n = 0, 1, 2, \dots$ qualsiasi



Quantificatori numericamente delimitati (3)

- Ecco alcuni esempi di uso dei quantificatori esistenziali numericamente delimitati:
 - ogni mese ha al massimo trentun giorni*
 $\forall x [\text{Mese}(x) \rightarrow \leq 31y \text{GiornoDi}(y,x)]$
 - ogni mese ha almeno ventotto giorni*
 $\forall x [\text{Mese}(x) \rightarrow \geq 28y \text{GiornoDi}(y,x)]$
 - ogni settimana ha esattamente sette giorni*
 $\forall x [\text{Settimana}(x) \rightarrow = 7y \text{GiornoDi}(y,x)]$



- Consideriamo l'enunciato
il figlio di Barbara è biondo
- Utilizzando quanto sappiamo già possiamo scrivere parzialmente la formula:
 $\text{Biondo}(\textit{il figlio di Barbara})$
- Utilizzando una variabile x e la costante predicativa FiglioDi possiamo fare un passo ulteriore:
 $\text{Biondo}(\textit{I' } x \textit{ tale che FiglioDi}(x, \textit{Barbara}))$
- L'espressione
I' x tale che ...
si rappresenta con l'operatore logico
 $\text{I}x \dots$ (oppure $\text{ι}x \dots$, dove ι è la lettera "iota" minuscola dell'alfabeto greco)



- Quindi la frase
il figlio di Barbara è biondo
si traduce con la formula
 $\text{Biondo}(\textit{I}x \textit{ FiglioDi}(x, \textit{Barbara}))$
- L'espressione
 $\text{I}x \textit{ FiglioDi}(x, \textit{Barbara}),$
detta descrizione definita, è un termine referenziale complesso che contiene come componente la formula atomica
 $\text{FiglioDi}(x, \textit{Barbara})$
- Come tutti gli altri termini referenziali (ad es. le costanti individuali), una descrizione definita viene utilizzata come argomento di costanti predicative



- Ci possiamo chiedere se anche le descrizioni definite, come i quantificatori esistenziali numericamente delimitati, possano essere ridotte ai simboli che conosciamo già (connettivi, quantificatori, uguaglianza)
- Secondo un'analisi proposta da Bertrand Russell (1905) la formula

Biondo($\exists x$ FiglioDi(x , Barbara))

può essere considerata come l'abbreviazione di

*c'è esattamente un figlio di Barbara,
e ogni figlio di Barbara è biondo*

ovvero:

[$= \exists x$ FiglioDi(x , Barbara)
 $\wedge \forall x$ [FiglioDi(x , Barbara) \rightarrow Biondo(x)]]



- Attenzione: dire che *esiste esattamente un figlio di Barbara* non significa affermare che Barbara non abbia altri figli, ma soltanto affermare che esiste esattamente un figlio di Barbara nel mondo del discorso
- Quindi l'enunciato

il figlio di Barbara è biondo

Biondo($\exists x$ FiglioDi(x , Barbara))

è vero anche se Barbara ha due figli, ad esempio uno biondo e l'altro bruno, purché il mondo del discorso contenga soltanto il primo!



- Se *il figlio di Barbara* è una descrizione definita, una descrizione indefinita è ad esempio

un figlio di Barbara

- Solitamente non si introduce una rappresentazione particolare per le descrizioni indefinite e ci si limita a usare il quantificatore esistenziale in modo opportuno

Esempio:

un figlio di Barbara è biondo

$\exists x [\text{FiglioDi}(x, \text{Barbara}) \wedge \text{Biondo}(x)]$



- L'uguaglianza come coreferenzialità di due termini referenziali
- Scrittura infissa dell'uguaglianza
- L'uguaglianza è sia una costante predicativa, sia un termine logico
- Esistenza e unicità
- Quantificatori numericamente delimitati
- Descrizioni definite