5. Il linguaggio predicativo del primo ordine

Sommario

- Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto tutti gli elementi che formano un particolare tipo di linguaggio logico, denominato linguaggio predicativo del primo ordine
- In questa lezione specifichiamo questo linguaggio in modo più sistematico e analizziamo la struttura delle sue formule

III-5
2

FOL

- Il linguaggio logico definito nelle lezioni precedenti prende il nome di linguaggio predicativo del primo ordine o più semplicemente linguaggio del primo ordine (FOL, da First Order Language)
- Il dizionario di FOL prevede quattro tipi di simboli:
  - simboli referenziali: le costanti individuali e le variabili individuali (x, y, z, ...)
  - simboli predicativi: le costanti predicative, l'uguaglianza
  - simboli logici: i connettivi booleani, il quantificatore esistenziale, il quantificatore universale, l'uguaglianza
  - simboli strutturali: le parentesi tonde e quadre, la virgola

III-5
3

FOL (2)

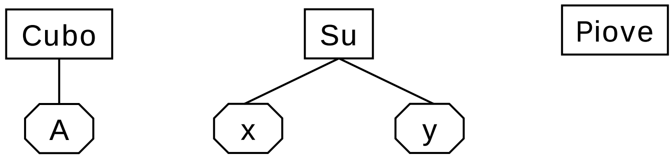
- Utilizzando i simboli e seguendo le regole di una ben precisa grammatica si formano vari tipi di espressioni:
  - termini referenziali: sono i simboli referenziali e le descrizioni definite
  - formule atomiche: sono costituite da una costante predicativa seguita da espressioni referenziali (delimitate dalle parentesi tonde e separate fra loro da virgole), in numero pari al numero di posti d'argomento della costante predicativa
  - formule complesse: sono formate a partire dalle formule atomiche utilizzando connettivi e quantificatori (con l'uso delle parentesi quadre quando necessario)

III-5
4

L’albero di una formula

- Le formule hanno una struttura che può essere messa in luce utilizzando un albero sintattico
- Il caso più semplice è dato dalle formule atomiche (ovvero prive di operatori logici)
  - la costante predicativa compare come radice dell’albero
  - gli argomenti compaiono come successori della radice:

Cubo(A) Su(x,y) Piove

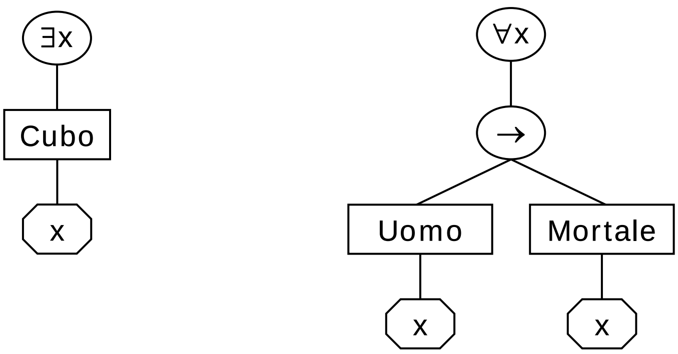


III-5
5

L’albero di una formula (2)

- Nelle formule complesse gli operatori (i connettivi, i quantificatori, l’operatore I) compaiono come nodi dell’albero:

$\exists x$ Cubo(x) $\forall x$ [Uomo(x) $\rightarrow$ Mortale(x)]

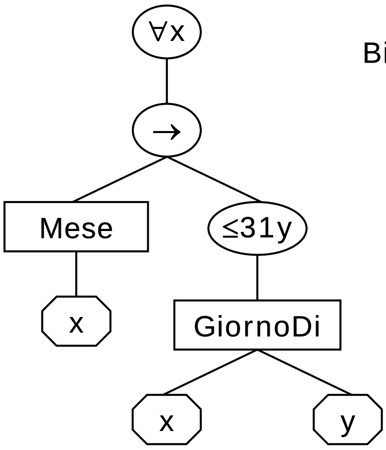


III-5
6

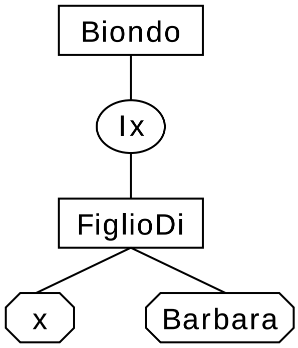
L'albero di una formula (3)

- Altri esempi:

  ∀x [Mese(x) → ≤31y GiornoDi(y,x)]



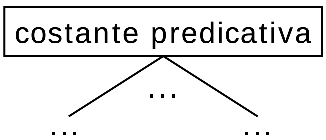
Biondo(Ix FiglioDi(x,Barbara))



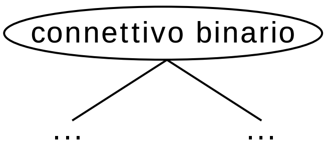
III-5
7

Albero e parentesi

- C'è una relazione stretta fra la forma di un albero e le parentesi della formula corrispondente:
  - ogni nodo del tipo riportato qui sotto dà luogo a una coppia di parentesi tonde (con eventuali virgole che separano gli argomenti della costante predicativa)



  - ogni nodo del tipo riportato qui sotto dà luogo a una coppia di parentesi quadre



III-5
8

Eliminazione delle parentesi superflue

- In algebra esistono convenzioni che consentono di rimuovere certe coppie di parentesi superflue, ad es.:

  $4 + (5 \times 3) \longrightarrow 4 + 5 \times 3$

- Regole analoghe vengono adottate in logica per l'eliminazione di parentesi quadre superflue:
  - regola 1: è sempre possibile rimuovere un'eventuale coppia di parentesi quadre esterna alla formula:

    $[[\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A)] \longrightarrow [\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A)$
  - regola 2: è possibile rimuovere coppie di parentesi tenendo conto del fatto che, per convenzione, $\wedge$ e $\vee$ "legano più fortemente" di $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$:

    $[\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A) \longrightarrow \neg P \wedge Q \rightarrow R(A)$

III-5
9

Eliminazione delle parentesi superflue (2)

- regola 3: se lo stesso connettivo binario è utilizzato più volte di seguito, per convenzione le parentesi vanno inserite da destra verso sinistra:

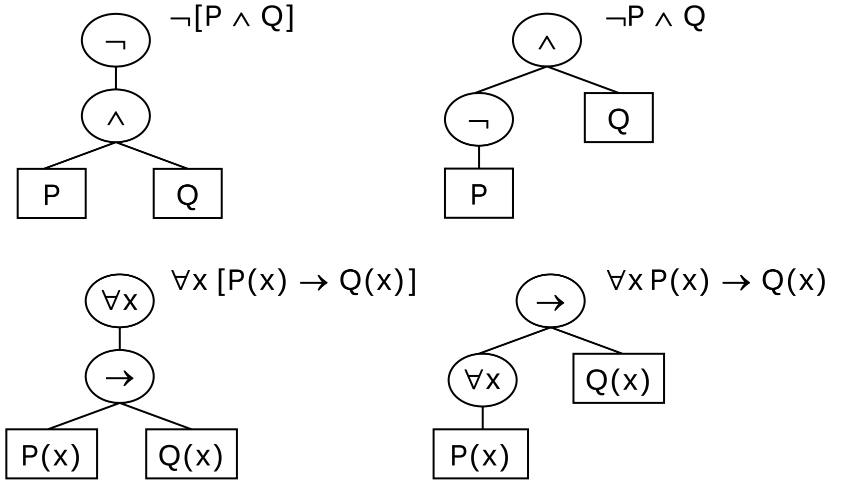
  $\neg P \wedge [Q \wedge R(A)] \longrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R(A)$

  $\neg P \rightarrow [Q \rightarrow R(A)] \longrightarrow \neg P \rightarrow Q \rightarrow R(A)$

III-5
10

Eliminazione delle parentesi superflue (3)

- Certe coppie di parentesi non possono essere eliminate, altrimenti cambia la struttura della formula:



III-5
11

Condizioni di verità

- Dato un mondo del discorso possiamo valutare una formula qualsiasi, ovvero stabilire se la formula è vera o falsa nel mondo del discorso, tenendo conto:
  - delle condizioni di verità delle formule atomiche (III-1)
  - delle condizioni di verità delle formule formate con i connettivi booleani, definite tramite le tavole di verità (III-2)
  - delle condizioni di verità delle formule formate con i quantificatori (III-3)
  - delle condizioni di verità dell’uguaglianza (III-4)
  - della riducibilità degli altri termini logici (quantificatori numericamente delimitati, descrizioni definite) ai termini logici già noti (III-4)

III-5
12

Formule chiuse e formule aperte

- La maggior parte delle formule viste finora sono formule chiuse, nel senso che tutte le occorrenze di variabili sono legate da un operatore logico (quantificatori, I)
- Importante: traducendo enunciati del linguaggio ordinario si ottengono sempre formule chiuse!
- Dal punto di vista formale sono corrette anche le formule aperte, in cui vi sono occorrenze di variabili libere, ovvero non legate da un operatore, come

  $P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)$
- Le formule aperte possono comparire come parte di una formula chiusa; ad es. la formula aperta riportata qui sopra compare come parte della formula chiusa

  $\forall x\, [P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)]$

III-5
13

Formule chiuse e formule aperte (2)

- Come abbiamo detto, traducendo enunciati del linguaggio ordinario si ottengono sempre formule chiuse (ovvero prive di occorrenze libere di variabili)
- Ciò non significa che ogni enunciato del linguaggio ordinario sia traducibile nel linguaggio logico del primo ordine: diciamo quindi, più precisamente, che ogni enunciato del linguaggio ordinario che sia traducibile in FOL può essere rappresentato con una formula FOL chiusa

  Viceversa, ogni formula FOL chiusa corrisponde a un enunciato del linguaggio ordinario
- Per questo motivo in logica è d'uso chiamare *enunciati* le formule chiuse, considerandole a tutti gli effetti come un modello formale degli enunciati del linguaggio ordinario

III-5
14

Simboli primitivi ed estensioni definitorie

- Abbiamo definito FOL come il linguaggio simbolico comprendente:
  - costanti predicative
  - costanti e variabili individuali
  - i simboli logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, $=$
- Abbiamo poi arricchito FOL di altri simboli logici, ottenendo così un'estensione definitoria del linguaggio precedentemente specificato; i simboli logici aggiuntivi, tutti riducibili ai simboli logici già noti, sono:
  - $\leq n$, $\geq n$, $=n$, I
- Ci possiamo ora chiedere se i simboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, $=$ sono tutti primitivi (ovvero non riducibili l'uno all'altro), o se invece possono essere ridotti a un insieme più limitato di simboli

III-5
15

Termini primitivi ed estensioni definitorie (2)

- In effetti è possibile definire FOL assumendo soltanto quattro simboli logici primitivi, ad esempio

  $\neg$, $\wedge$, $\forall$ e $=$,

  e introdurre gli altri simboli logici tramite definizioni
- Utilizzando $\neg$, $\wedge$ e $\forall$ si definiscono $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\exists$:

$$\begin{array}{lll} \alpha \vee \beta & =_{\text{def}} & \neg[\neg\alpha \wedge \neg\beta] \\ \alpha \rightarrow \beta & =_{\text{def}} & \neg\alpha \vee \beta \\ \alpha \leftrightarrow \beta & =_{\text{def}} & [\alpha \rightarrow \beta] \wedge [\beta \rightarrow \alpha] \\ \exists x\, \alpha & =_{\text{def}} & \neg\forall x \neg\alpha \end{array}$$

- Per la definizione degli altri simboli logici ($\leq n$, $\geq n$, $=n$, I), per i quali si utilizza anche l'uguaglianza, si veda la lezione II-4

III-5

16

Concetti importanti

- FOL: linguaggio predicativo del primo ordine (o linguaggio del primo ordine)
- Dizionario dei simboli: simboli logici, simboli predicativi, simboli referenziali, simboli strutturali
- Grammatica: termini referenziali, formule atomiche, formule complesse
- Struttura delle formule e alberi sintattici
- Regole per l’eliminazione delle parentesi superflue
- Formule aperte e formule chiuse, traducibilità degli enunciati del linguaggio ordinario in formule chiuse
- Simboli primitivi e simboli riducibili; estensioni definitorie
- I quattro simboli logici primitivi di FOL