



6. FOL: istruzioni per l'uso



- Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto un importante linguaggio simbolico della logica: il linguaggio del primo ordine
- Nel seguito del corso sarà importante imparare a utilizzare questo linguaggio per esprimere concetti via via più complessi
- Come primo passo, in questa lezione analizziamo un certo numero di traduzioni da enunciati del linguaggio ordinario a formule FOL



- Le proposizioni atomiche (ovvero, le formule formate da una costante predicativa nulladica) vengono utilizzate per rappresentare proprietà del mondo che sono globali, in quanto non riguardano specifici individui:

<i>piove</i>	Piove
<i>fa freddo</i>	FaFreddo
<i>è notte</i>	Notte
<i>è inverno</i>	Inverno
<i>è giovedì</i>	Giovedì

- un enunciato come *d'inverno fa freddo* viene prima tradotto in *se è inverno, allora fa freddo* e poi formalizzato come

Inverno → FaFreddo



- I connettivi booleani sono quei connettivi il cui significato si può ricondurre al solo modo di operare sui valori di verità
- Molti connettivi del linguaggio ordinario (come *ma*, *invece*, *quindi*, *perché* e così via) non sono connettivi booleani, perché il loro significato va al di là del loro modo di operare sui valori di verità
- Consideriamo ad esempio l'enunciato

piove ma non fa freddo

Questo enunciato è vero quando piove e non fa freddo, tuttavia il suo significato non si riduce a questo: l'uso del connettivo avversativo *ma* suggerisce anche che di solito, per lo meno nell'attuale mondo del discorso, quando piove fa freddo



- Se trascuriamo questo aspetto e ci limitiamo alle sole condizioni di verità, il connettivo *ma* si comporta come la congiunzione *e*
- In FOL, quindi, possiamo approssimare il connettivo avversativo *ma* con la semplice congiunzione:
piove ma non fa freddo
 $\text{Piove} \wedge \neg \text{FaFreddo}$
- Altri connettivi non booleani possono essere approssimati in modo analogo, ad esempio
è inverno, ma piove invece di nevicare
 $\text{Inverno} \wedge \text{Piove} \wedge \neg \text{Nevica}$
- I connettivi *quindi*, *perché* e analoghi saranno brevemente analizzati nella parte III



- Nel linguaggio ordinario i connettivi a volte connettono non interi enunciati, ma altri tipi di espressioni linguistiche, come ad esempio sintagmi nominali:
i cani e i gatti sono animali domestici
- In questo caso occorre fare molta attenzione alla traduzione: infatti la formula
 $\forall x [\text{Cane}(x) \wedge \text{Gatto}(x) \rightarrow \text{AnimDom}(x)]$
non tradurrebbe correttamente l'enunciato, in quanto significa
tutti gli individui che sono (contemporaneamente) cani e gatti sono animali domestici



- L'enunciato originale va visto come un'abbreviazione dell'enunciato

*i cani sono animali domestici
e i gatti sono animali domestici*

che si formalizza come

$$\forall x [\text{Cane}(x) \rightarrow \text{AnimDom}(x)] \\ \wedge \forall x [\text{Gatto}(x) \rightarrow \text{AnimDom}(x)]$$

o, con una formula equivalente, come

$$\forall x [\text{Cane}(x) \vee \text{Gatto}(x) \rightarrow \text{AnimDom}(x)]$$


- Nel linguaggio ordinario il quantificatore universale è spesso sottinteso:

gli alberi sono vegetali
 $\forall x [\text{Albero}(x) \rightarrow \text{Vegetale}(x)]$

chi dorme non piglia pesci
 $\forall x [\text{Dorme}(x) \rightarrow \neg \exists y [\text{Pesce}(y) \wedge \text{Piglia}(x,y)]]$

o equivalentemente

$$\forall x [\text{Dorme}(x) \rightarrow \forall y [\text{Pesce}(y) \rightarrow \neg \text{Piglia}(x,y)]]$$

- In certi casi si usa il quantificatore universale per approssimare il quantificatore sfumato *generalmente* o *normalmente*, spesso sottinteso:

(generalmente) le madri amano i propri figli
 $\forall x \forall y [\text{MadreDi}(x,y) \rightarrow \text{Ama}(x,y)]$



- Occorre fare molta attenzione alla traduzione degli articoli dell'italiano, che spesso danno luogo a più interpretazioni, ad esempio:

il cane abbaia

interpretazione specifica (*quel cane li abbaia*)

$\text{Abbaia}(\text{I}x \text{Cane}(x))$

interpretazione generica (*in generale i cani abbaiano*)

$\forall x [\text{Cane}(x) \rightarrow \text{Abbaia}(x)]$

un cane abbaia

interpretazione specifica (*c'è un cane che abbaia*)

$\exists x [\text{Cane}(x) \wedge \text{Abbaia}(x)]$

interpretazione generica (*in generale i cani abbaiano*)

$\forall x [\text{Cane}(x) \rightarrow \text{Abbaia}(x)]$



i cani abbaiano (tutti i cani abbaiano)

$\forall x [\text{Cane}(x) \rightarrow \text{Abbaia}(x)]$

dei cani abbaiano (almeno due cani abbaiano)

$\geq 2x [\text{Cane}(x) \wedge \text{Abbaia}(x)]$

- C'è poi una sottile differenza fra

Andrea è italiano

Andrea è un italiano

Questa differenza può essere colta dalle due traduzioni seguenti:

$\text{Italiano}(\text{Andrea})$

$\exists x [(x = \text{Andrea}) \wedge \text{Italiano}(x)]$

che sono comunque equivalenti dal punto di vista del valore di verità



- Le frasi relative vengono tradotte utilizzando descrizioni definite e congiunzioni:

l'uomo che saluta Barbara è antipatico

è antipatico l'x tale che: x è un uomo e x saluta Barbara

Antipatico(λx [Uomo(x) \wedge Saluta(x,Barbara)])

Barbara è la ragazza che abita a Bellinzona

Barbara è l'x tale che: x è una ragazza e x abita a Bellinzona

Barbara = λx [Ragazza(x) \wedge Abita(x,Bellinzona)]



- Attenzione alla differenza fra le frasi relative

- restrittive, come

il professore che insegna logica è italiano

(l'unico individuo del mondo del discorso che sia professore e insegni logica è italiano)

Italiano(λx [Prof(x) \wedge Insegna(x,Logica)])

- non restrittive, come

il professore, che insegna logica, è italiano

(l'unico individuo del mondo del discorso che sia professore insegna logica ed è italiano)

Insegna(λx Prof(x),Logica) \wedge Italiano(λx Prof(x))



III-6

12

Pronomi personali

- I pronomi personali (*io, tu* e così via) sono termini referenziali il cui referente viene determinato tenendo conto del contesto di enunciazione (che comprende anche il parlante e il destinatario)
- In FOL risolviamo il riferimento dei pronomi personali utilizzando costanti individuali:

Andrea a Barbara: *Camilla mi piace*

PiaceA(Camilla,Andrea)

Barbara ad Andrea: *a me no*

¬PiaceA(Camilla,Barbara)



III-6

13

Aggettivi possessivi

- Gli aggettivi possessivi (*mio, tuo, ...*) vanno risolti mettendo in luce quale sia la relazione fra gli individui coinvolti:

Andrea: *un mio cavallo è malato*

$\exists x [\text{Cavallo}(x) \wedge \text{Possiede}(\text{Andrea},x) \wedge \text{Malato}(x)]$

Barbara: *la mia automobile è vecchia*

$\text{Vecchia}(\exists x [\text{Auto}(x) \wedge \text{Possiede}(\text{Barbara},x)])$

Claudia: *mi brucia la gola (= la mia gola brucia)*

$\text{Brucia}(\exists x [\text{Gola}(x) \wedge \text{ParteDelCorpoDi}(x,\text{Claudia})])$



- Un procedimento importante della logica del primo ordine è la reificazione, che consiste nel trattare entità astratte come individui del mondo del discorso
- Esempio: la frase
c'è una mela rossa
si può tradurre come
 $\exists x [\text{Mela}(x) \wedge \text{Rosso}(x)]$
oppure, reificando il colore rosso, come
 $\exists x [\text{Mela}(x) \wedge \text{HaColore}(x, \text{Rosso})]$
- Nel primo caso Rosso(–) è una costante predicativa monadica che esprime la proprietà di *essere rosso*, nel secondo caso Rosso è una costante individuale il cui referente è l'individuo astratto *il rosso*



- La reificazione consente di esprimere concetti che altrimenti non sarebbero esprimibili in FOL:
il rosso, il verde e il blu sono colori
 $\text{Colore}(\text{Rosso}) \wedge \text{Colore}(\text{Verde}) \wedge \text{Colore}(\text{Blu})$
il rosso e il giallo sono colori caldi
 $\text{ColoreCaldo}(\text{Rosso}) \wedge \text{ColoreCaldo}(\text{Giallo})$
ogni oggetto fisico ha (almeno) un colore
 $\forall x [\text{OggFis}(x) \rightarrow \exists y [\text{Colore}(y) \wedge \text{HaColore}(x, y)]]$



- Spesso la reificazione dà origine a individui complessi, ovvero dotati di numerose componenti:

ogni corso ha esattamente un docente come titolare e almeno cinque studenti iscritti

$\forall x [\text{Corso}(x)$

$\rightarrow =1y [\text{Docente}(y) \wedge \text{TitolareDi}(y,x)]$

$\wedge \geq 5z [\text{Studente}(z) \wedge \text{IscrittoA}(z,x)]]$



- Finora abbiamo trattato i nomi propri (Andrea, Lugano, ...) come vere e proprie costanti individuali
- In realtà è più corretto vedere un nome proprio come una proprietà di un individuo o meglio, reificando i nomi propri, come una relazione binaria fra un individuo e un nome
- Il termine referenziale *Andrea* può allora tradotto come

l'individuo il cui nome è Andrea,

ovvero:

$\exists x \text{ NomeDi}(\text{Andrea}, x)$



- Ci sono comunque molti dispositivi del linguaggio ordinario che non si possono tradurre in FOL
- Di alcuni di questi dispositivi si occupano altre parti della logica, che non tratteremo in questo corso
- Oltre ai connettivi non booleani e ai quantificatori sfumati abbiamo ad esempio:
 - i tempi verbali (passato, futuro, ...): se ne occupa la logica temporale
 - i verbi e le espressioni modali (*deve, può, è necessario che, è obbligatorio che, ...*): se ne occupa la logica modale



- Uso delle proposizioni atomiche
- Traduzione in FOL di:
 - connettivi non booleani
 - connettivi fra sintagmi nominali
 - quantificatori sottintesi
 - articoli
 - frasi relative (restrittive e non restrittive)
 - pronomi personali
 - aggettivi possessivi
- Reificazione
- Dispositivi linguistici non esprimibili nel linguaggio del primo ordine: tempi verbali, espressioni modali, ...