1. La forma logica

Sommario

- Nella parte III abbiamo definito un linguaggio logico di ampio utilizzo, il linguaggio predicativo del primo ordine (FOL)
- Nella parte IV utilizzeremo FOL per analizzare alcuni concetti importanti

  In particolare ci occuperemo della distinzione fra forma e contenuto
- In questa lezione inizieremo analizzando il concetto di forma logica

IV-1
2

Forma e contenuto

- I termini *forma* e *contenuto* vengono usati spesso per contrapporre due aspetti di un messaggio

  Intuitivamente
  - il contenuto di un messaggio corrisponde a ciò che si dice
  - la forma invece a come lo dice
- Utilizzando gli strumenti formali appresi nella parte III cercheremo ora di rendere questa distinzione più chiara e rigorosa

  Inizieremo analizzando uno degli aspetti della forma, ovvero la forma logica

IV-1
3

La forma logica

- Consideriamo i due enunciati seguenti:

  gli alberi sono vegetali
  ogni diamante è prezioso
- In superficie i due enunciati sono piuttosto diversi

  Tuttavia hanno qualcosa in comune: ambedue gli enunciati affermano che tutti gli individui di un certo tipo (gli alberi, i diamanti) hanno una certa proprietà (sono vegetali, sono preziosi)
- In effetti i due enunciati condividono la stessa forma logica

  Vediamo ora come questo concetto intuitivo possa essere reso preciso

La forma logica (2)

- Traducendo i due enunciati in FOL otteniamo due formule molto simili:

  $\forall x\ [\text{Albero}(x) \rightarrow \text{Vegetale}(x)]$

  $\forall x\ [\text{Diamante}(x) \rightarrow \text{Prezioso}(x)]$

- Per far risaltare la somiglianza fra le due formule rimpiazziamo le costanti predicative specifiche (Albero e Vegetale, Diamante e Prezioso) con simboli predicativi generici, come $P(–)$ e $Q(–)$

  Ad ambedue le formule corrisponde allora lo stesso schema di formula:

  $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$,

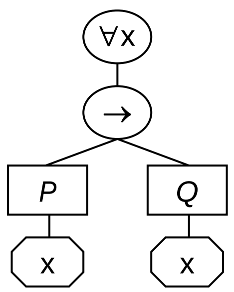
  che dice che tutti gli individui che hanno la proprietà $P(–)$ hanno anche la proprietà $Q(–)$

La forma logica (3)

- Lo schema di formula

  $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$,

  che si può rappresentare anche come albero



  rappresenta ciò che i due enunciati hanno in comune, ovvero la loro forma logica

IV-1
6

La forma logica (4)

- Dunque la forma logica di un enunciato del linguaggio ordinario coincide con lo schema della formula che rappresenta l'enunciato
- Lo schema della formula mette in luce:
  - la struttura della formula
  - i termini logici che compaiono nella formula, insieme con la loro posizione nella struttura della formula
  - la presenza e la posizione di eventuali costanti individuali e predicative nella formula (senza però precisare quali siano tali costanti)

IV-1
7

Forma logica e pensiero umano

- Le lingue umane differiscono fra loro sia per il lessico (le parole della lingua), sia per la grammatica
- Tuttavia, le forme logiche sottostanti gli enunciati di tutte le lingue sono presumibilmente le stesse

  Ad esempio, tutte le lingue hanno dispositivi per:
  - fare riferimento a individui
  - predicare proprietà di individui e relazioni fra individui
  - formare negazioni, congiunzioni, disgiunzioni, condizionali, quantificazioni universali ed esistenziali, e così via
- La forma logica sembra essere un universale del pensiero umano, ovvero una caratteristica cognitiva comune a tutti i membri della specie *Homo sapiens*

IV-1
8

Applicazioni del concetto di forma logica

- Nel seguito di questa lezione e nelle lezioni successive utilizzeremo la forma logica come strumento per definire e analizzare alcuni concetti importanti, e in particolare:
  - la categoria logica di una formula (IV-1)
  - la conseguenza logica e la validità della deduzione (IV-2)
  - il calcolo logico (IV-3 e IV-4)

IV-1
9

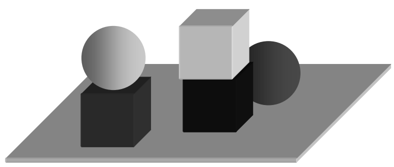
Verità materiale e verità logica

- In generale una formula è vera o falsa a seconda di come stanno le cose nel mondo del discorso
- Ad esempio, la formula

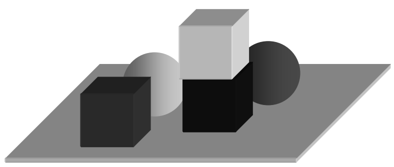
  $\exists x \exists y\, [\mathrm{Sfera}(x) \wedge \mathrm{Cubo}(y) \wedge \mathrm{Su}(x,y)]$

  (c'è una sfera su un cubo)

  è vera nel mondo M_1 ed è falsa nel mondo M_2



M_1



M_2

Verità materiale e verità logica (2)

- Quando una formula è vera (falsa) grazie agli stati di cose che sussistono nel mondo del discorso, la formula si dice anche materialmente vera (materialmente falsa)
- Esistono però formule che sono sempre vere (sempre false) indipendentemente dagli stati di cose
- Ad esempio, la formula

  $\forall x\ [\mathrm{Cubo}(x) \rightarrow \mathrm{Cubo}(x)]$ *(un cubo è un cubo)*

  è vera in qualunque mondo del discorso perché
  - l'antecedente e il conseguente sono uguali, quindi hanno lo stesso valore di verità qualunque sia il valore attribuito a x
  - quando l'antecedente e il conseguente di un condizionale hanno lo stesso valore di verità, il condizionale è vero (vedi III-2:12)

Verità logica (2)

- Una formula vera in ogni possibile mondo del discorso si dice logicamente vera (o tautologica)
- Ma se non è il mondo del discorso a rendere vera la formula

  $\forall x\ [\mathrm{Cubo}(x) \rightarrow \mathrm{Cubo}(x)]$,

  quale caratteristica la rende vera?
- Consideriamo la forma logica della formula, ovvero lo schema di formula

  $\forall x\ [P(x) \rightarrow P(x)]$

  Ogni formula che segue questo schema è vera in ogni mondo del discorso e quindi è logicamente vera
- Dunque ciò che rende una formula logicamente vera è la sua forma logica

Verità logica (3)

- In simboli, per dire che una formula α è logicamente vera si scrive

  $\models \alpha$

  Per dire che una formula α non è logicamente vera si scrive invece

  $\not\models \alpha$

- Ad esempio:

  $\models \forall x\,[\mathrm{Cubo}(x) \rightarrow \mathrm{Cubo}(x)]$

  $\not\models \exists x\,\exists y\,[\mathrm{Sfera}(x) \wedge \mathrm{Cubo}(y) \wedge \mathrm{Su}(x,y)]$

Falsità logica

- Analogamente, esistono formule che sono false in ogni possibile mondo del discorso, che si dicono logicamente false (o contraddittorie)
- Ad esempio risulta logicamente falsa ogni formula della forma

  $\exists x\,[P(x) \wedge \neg P(x)]$,

  perché la congiunzione di una formula con la sua negazione è necessariamente falsa

  Quindi è logicamente falsa la formula

  $\exists x\,[\mathrm{Cubo}(x) \wedge \neg\mathrm{Cubo}(x)]$
  (c'è qualcosa che è un cubo e non è un cubo)

IV-1
14

Falsità logica (2)

- Anche la falsità logica di una formula dipende dalla sua forma logica
- Una formula α è logicamente falsa se e solo se la sua negazione $\neg\alpha$ è logicamente vera, e viceversa

  Quindi, per dire che una formula α è logicamente falsa scriveremo

  $\models \neg\alpha$

  Per dire invece che una formula α non è logicamente falsa scriveremo

  $\not\models \neg\alpha$

- Ad esempio:

  $\models \neg\exists x\, [\mathrm{Cubo}(x) \wedge \neg\mathrm{Cubo}(x)]$

IV-1
15

Contingenza

- Una formula che possa risultare vera oppure falsa a seconda del mondo del discorso si dice contingente
- Una formula α è contingente se (e solo se) non è né logicamente vera né logicamente falsa, e quindi se, (e solo se):

  $\not\models \alpha$ e $\not\models \neg\alpha$

Categorie logiche

- Per le formule abbiamo quindi tre categorie logiche:

tutte le formule		
logicamente vere	contingenti	logicamente false
$\models \alpha$	$\not\models \alpha$ e $\not\models \neg\alpha$	$\models \neg\alpha$
vere in ogni mondo	vere in qualche mondo e false in qualche mondo	false in ogni mondo
tautologia		*contraddizione*

- È comunque la forma logica di una formula a determinarne la categoria logica

Linguaggio oggetto e metalinguaggio

- La linguistica e la logica condividono un problema: hanno un linguaggio (naturale o formale) come oggetto di studio, ma nel contempo, come ogni altra disciplina, utilizzano il linguaggio per parlare del proprio oggetto di studio
- Per evitare confusioni occorre tenere nettamente distinti il linguaggio che costituisce l'oggetto di studio (detto linguaggio oggetto) dal linguaggio utilizzato per parlare dell'oggetto di studio (detto metalinguaggio)

  Ad esempio, se in un corso si utilizza l'italiano per insegnare il tedesco agli studenti, il tedesco è il linguaggio oggetto e l'italiano è il metalinguaggio

Linguaggio oggetto e metalinguaggio (2)

IV-1 18

- Nella logica simbolica, il linguaggio oggetto è un linguaggio simbolico, ad esempio FOL
- In questo corso il metalinguaggio è l'italiano, arricchito da un certo numero di simboli tecnici che chiameremo simboli metalinguistici
- Non bisogna mai confondere i simboli metalinguistici con i simboli del linguaggio oggetto!

  Ad esempio, il simbolo α utilizzato per indicare una formula qualsiasi non è un simbolo del linguaggio oggetto, bensì un simbolo metalinguistico

  Più precisamente, α è una variabile metalinguistica, che varia sull'insieme di tutte le possibili formule del linguaggio oggetto

Linguaggio oggetto e metalinguaggio (3)

IV-1 19

- Analogamente il simbolo $\models$ che indica la verità logica è un simbolo metalinguistico
- Quando scriviamo

  $\models \forall x\, [Cubo(x) \rightarrow Cubo(x)]$

  per dire che la formula $\forall x\, [Cubo(x) \rightarrow Cubo(x)]$ è logicamente vera, il simbolo

  $\models$

  è un simbolo del metalinguaggio, mentre i simboli

  $\forall \quad x \quad \rightarrow \quad Cubo \quad [\quad] \quad (\quad)$

  sono simboli del linguaggio oggetto (un linguaggio FOL)

IV-1

20

Concetti importanti

- Forma logica
- Categorie logiche: formule logicamente vere, logicamente false, contingenti
- Linguaggio oggetto e metalinguaggio
- Simboli del linguaggio oggetto, simboli metalinguistici