2. La deduzione

Sommario

- Nella lezione precedente abbiamo definito il concetto di forma logica e l'abbiamo utilizzato per classificare le formule in tre categorie logiche: logicamente vere (cioè vere in ogni possibile mondo del discorso), logicamente false (cioè false in ogni possibile mondo del discorso) e contingenti (cioè vere in certi mondi del discorso e false in altri)
- In questa lezione vedremo che la forma logica può anche dar conto anche della validità di un'inferenza deduttiva o deduzione

  Esistono altri tipi di inferenza, come l'abduzione e l'induzione, di cui però non ci occuperemo in questo corso

IV-2
2

L’inferenza

- Un’inferenza è un ragionamento in cui un enunciato, detto conclusione, viene ricavato a partire da altri enunciati, detti premesse
- In generale un’inferenza ha la forma seguente:

  premessa 1,
  premessa 2,
  ...,
  premessa N,
  ∴ *conclusione*

  dove ∴ è un simbolo metalinguistico, che rappresenta il connettivo non booleano *quindi* ed è utilizzato per indicare la conclusione

IV-2
3

L’inferenza (2)

- Ci sono inferenze di tipo diverso, e in particolare:
  - l’inferenza deduttiva o deduzione
  - l’inferenza abduttiva o abduzione
  - l’inferenza induttiva o induzione
- La deduzione è l’unico tipo d’inferenza che permette di passare dalle premesse alla conclusione con assoluta certezza

  Per questo motivo la deduzione è alla base del ragionamento matematico e costituisce un oggetto di studio d’importanza centrale per la logica

IV-2
4

La deduzione

- Il testo seguente descrive una deduzione:

  (1) *Tutti gli svizzeri sono puntuali*
  Andrea non è puntuale
  ∴ *Andrea non è svizzero*

- Questa deduzione appare valida, nel senso che, almeno intuitivamente, la conclusione discende logicamente dalle premesse
- Invece la deduzione seguente non sembra valida, nel senso che, sempre intuitivamente, la conclusione non discende logicamente dalle premesse:

  (2) *Tutti gli svizzeri sono puntuali*
  Andrea è puntuale
  ∴ *Andrea è svizzero*

IV-2
5

Validità e conseguenza logica

- Una deduzione si dice valida se, e solo se, la conclusione discende logicamente dalle premesse
- Per definizione, poi, un enunciato $\boldsymbol{\beta}$ discende logicamente dagli enunciati $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N$ se, e solo se:
  - *in ogni mondo del discorso in cui* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ *siano tutti veri, è certamente vero anche* β

  Quando un enunciato $\boldsymbol{\beta}$ discende logicamente dagli enunciati $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N$ si dice anche che $\boldsymbol{\beta}$ è conseguenza logica di $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N$ (in inglese: $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N$ *entail* $\boldsymbol{\beta}$)
- Dunque una deduzione è valida se, e solo se, la sua conclusione è certamente vera in ogni mondo del discorso in cui siano vere tutte le sue premesse

IV-2
6

Validità e conseguenza logica (2)

- Nel metalinguaggio della logica, con

  $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \models \beta$

  si indica che β discende logicamente da $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, e con

  $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \not\models \beta$

  si indica che β non discende logicamente da $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$

- NOTA: le formule sono separate dalla virgola "," che in questo caso è un simbolo metalinguistico e non va confusa con la virguala che separa gli argomenti di un termine predicativo.

IV-2
7

Validità e conseguenza logica (3)

- La deduzione (1) è valida perché:
  - ammettendo che nel mondo del discorso sia vero che *tutti gli svizzeri sono puntuali* e che *Andrea non è puntuale* ...
  - ... allora, sempre nello stesso mondo del discorso, è certamente vero che *Andrea non è svizzero* perché, se lo fosse, grazie alla prima premessa sarebbe puntuale
- La deduzione (2) non è valida (è invalida) perché:
  - anche se nel mondo del discorso è vero che *tutti gli svizzeri sono puntuali* e che *Andrea è puntuale* ...
  - ... nello stesso mondo del discorso è possibile che *Andrea non sia svizzero* (potrebbe essere inglese, ad esempio, ed essere lo stesso puntuale)

IV-2 8

Validità e conseguenza logica (4)

- Attenzione: dire che una deduzione è valida non significa dire che la conclusione è senz'altro vera!

  Piuttosto significa dire che la conclusione è senz'altro vera nell'ipotesi che siano vere le premesse
- Se anche una sola premessa di una deduzione valida è falsa, nulla si può dire sulla verità della conclusione

  Ad esempio, se non è vero che *tutti gli svizzeri sono puntuali*, oppure se non è vero che *Andrea non è puntuale*, nulla si può dire sulla verità della conclusione

  Andrea non è svizzero

  benché la deduzione (1) sia valida

IV-2 9

Validità e forma logica

- Come ora mostreremo, la validità di una deduzione dipende soltanto dalla sua forma logica
- Iniziamo traducendo l'argomentazione (1) in FOL:

  $\forall x\, [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)]$,

  $\neg\text{Puntuale}(\text{Andrea})$

  $\therefore\ \neg\text{Svizzero}(\text{Andrea})$
- Per definizione questa deduzione sarà valida se, e solo se,

  $\forall x\, [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)]$,

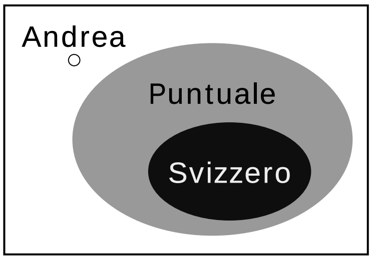
  $\neg\text{Puntuale}(\text{Andrea})$

  $\models \neg\text{Svizzero}(\text{Andrea})$

IV-2
10

Validità e forma logica (2)

- Ora ragioniamo aiutandoci con un diagramma:
  - in ogni mondo del discorso in cui la prima premessa sia vera, l'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(–) è contenuto nell'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(–)
  - se nel mondo del discorso è vera anche la seconda premessa, il referente di Andrea non appartiene all'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(–)
  - ma allora Andrea non può appartenere all'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(–), e quindi la conclusione è certamente vera



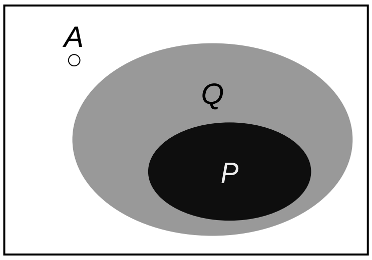
IV-2
11

Validità e forma logica (3)

- Un punto importante è che il nostro ragionamento è indipendente dal significato dei termini Svizzero(–), Puntuale(–) e Andrea
- In altre parole, possiamo ragionare esattamente allo stesso modo per ogni deduzione che abbia la forma

  $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$,
  $\neg Q(A)$
  $\therefore\ \neg P(A)$

- Quindi la validità della (1) dipende solo dalla forma logica dei suoi enunciati e non dal significato dei termini predicativi e referenziali utilizzati



IV-2 12

Deduzioni invalide

- Ora mostreremo che la deduzione (2) è invalida
- In FOL la (2) diventa:

  $\forall x\,[\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)]$,
  Puntuale(Andrea)
  $\therefore$ Svizzero(Andrea)

- La deduzione è invalida se, e solo se,

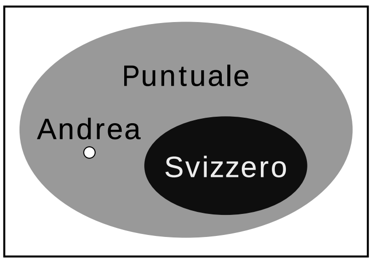
  $\forall x\,[\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)]$,
  Puntuale(Andrea)
  $\not\models$ Svizzero(Andrea)

- Come possiamo dimostrare che la conclusione non segue logicamente dalle premesse? Ci basta costruire un **controesempio**, ovvero un mondo del discorso in cui le premesse siano vere e la conclusione sia falsa

IV-2 13

Un controesempio

- Aiutiamoci ancora con un diagramma:
  - in ogni mondo del discorso in cui la prima premessa sia vera, l'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(–) è contenuto nell'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(–)
  - perché sia vera anche la seconda premessa basta che il referente di Andrea appartenga all'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(–)
  - ma allora è possibile che Andrea non appartenga all'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(–), e quindi la conclusione può essere falsa



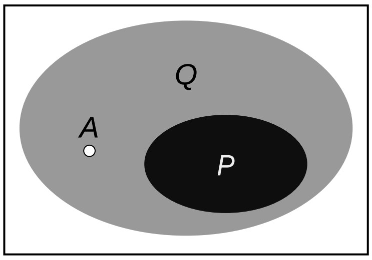
IV-2
14

Invalidità e forma logica

- Anche in questo caso il ragionamento è indipendente dal significato dei termini Svizzero(–), Puntuale(–) e Andrea
- In altre parole possiamo ragionare esattamente allo stesso modo per ogni deduzione che abbia la forma

  $\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)]$,
  $Q(A)$
  $\therefore P(A)$

- Quindi l'invalidità della (2) dipende solo dalla forma logica dei suoi enunciati e non dal significato dei termini predicativi e referenziali utilizzati



IV-2
15

Il calcolo logico

- Come abbiamo visto, *è possibile dimostrare la validità di una deduzione basandosi su ragionamenti di tipo insiemistico*
- Tuttavia questo modo di ragionare diventa rapidamente *molto oneroso* non appena la deduzione si fa un po' complessa, in particolare se si utilizzano costanti predicative a più di un posto d'argomento
- *L'ideale sarebbe disporre di un calcolo logico*, ovvero di una procedura che consenta di dimostrare la validità di una deduzione in modo pressoché automatico:

  Di questo ci occuperemo nella prossima lezione

IV-2

16

Concetti importanti

- Inferenza: premesse, conclusione
- Deduzioni valide e invalide
- Conseguenza logica
- Validità e forma logica
- Costruzione di un controesempio