



2. I connettivi booleani



- Nella lezione precedente abbiamo definito il concetto di formula atomica
- In questa lezione mostriamo come le formule atomiche possano essere combinate fra loro utilizzando dei connettivi per ottenere formule complesse



- Il linguaggio ordinario è molto ricco di connettivi, ovvero di termini logici che consentono di comporre enunciati complessi a partire da enunciati più semplici, come ad esempio:

non, e, o, ma, invece di, ...

- Alcuni di questi connettivi, denominati connettivi booleani in onore di George Boole, sono particolarmente semplici da trattare e di uso molto generale:

■ negazione:	<i>non ...</i>	\neg
■ congiunzione:	<i>... e ...</i>	\wedge
■ disgiunzione:	<i>... o ...</i>	\vee
■ condizionale:	<i>se ... allora ...</i>	\rightarrow
■ bicondizionale:	<i>... se e solo se ...</i>	\leftrightarrow



- Il simbolo \neg posto di fronte a una formula la trasforma nella sua negazione:

Biondo(Andrea)	<i>Andrea è biondo</i>
\neg Biondo(Andrea)	<i>Andrea non è biondo</i>

La formula negata può anche essere letta come

non è vero che Andrea sia biondo

- La negazione è un connettivo unario, perché si applica a una singola formula
- È possibile iterare più volte la negazione:

$\neg\neg$ Biondo(Andrea)
<i>non è vero che Andrea non sia biondo</i>



Condizioni di verità della negazione

- Un enunciato negato $\neg\alpha$ è vero se l'enunciato non negato α è falso, ed è falso se l'enunciato α è vero
- Dai lavori di Boole in poi si indica il valore di verità *falso* con 0 e il valore di verità *vero* con 1
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della negazione:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0



La congiunzione

- La congiunzione di due formule si ottiene ponendo il simbolo \wedge fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

[Biondo(Andrea) \wedge Bruno(Barbara)]

Andrea è biondo e Barbara è bruna

(Attenzione: le costanti predicative non sono aggettivi dell'italiano, e quindi non si ha concordanza di genere)

- La congiunzione è un connettivo binario, perché si applica a due formule

Quando più di due frasi sono poste in congiunzione si usa più volte la congiunzione binaria:

[Biondo(Barbara) \wedge [Alto(Andrea) \wedge Bruno(Andrea)]]



- È possibile combinare fra loro la congiunzione e la negazione (e anche tutti gli altri connettivi che vedremo in seguito):

$$\neg[\text{Sciocco}(\text{Andrea}) \wedge \neg\text{Capace}(\text{Andrea})]$$

non è vero che Andrea sia sciocco e incapace



- Una congiunzione $[\alpha \wedge \beta]$ è vera se entrambi gli enunciati α e β sono veri ed è falsa in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della congiunzione:

α	β	$[\alpha \wedge \beta]$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- La disgiunzione di due formule si ottiene ponendo il simbolo \vee fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:

$[Piove() \vee FaFreddo()]$

piove o fa freddo

- La disgiunzione s'intende inclusiva, nel senso che non esclude la verità di entrambi gli enunciati posti in disgiunzione (*or* inclusivo)

La disgiunzione esclusiva (*xor*) si può comunque esprimere nel modo seguente:

$[[Piove() \vee FaFreddo()] \wedge \neg[Piove() \wedge FaFreddo()]]$



- Una disgiunzione $[a \vee b]$ è falsa se entrambi gli enunciati a e b sono falsi ed è vera in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità della disgiunzione:

a	b	$[a \vee b]$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



III-2

10

Il condizionale

- Il condizionale di due formule si ottiene ponendo il simbolo \rightarrow fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:
[Parte(Andrea) \rightarrow Triste(Barbara)]
se Andrea parte, allora Barbara è triste
oppure
Barbara è triste se Andrea parte
- In un condizionale $[\alpha \rightarrow \beta]$ l'enunciato α è detto l'antecedente e l'enunciato β è detto il conseguente
- In logica si studiano vari tipi di condizionale, ma l'unico tipo di cui ci occupiamo in questo corso è il cosiddetto condizionale materiale



III-2

11

Il condizionale materiale

- Consideriamo di nuovo la frase
se Andrea parte, allora Barbara è triste
[Parte(Andrea) \rightarrow Triste(Barbara)]
In quali condizioni chi enuncia questa frase dice il vero?
- Abbiamo quattro casi possibili:
 - Andrea parte, Barbara è triste: il parlante ha detto il vero
 - Andrea parte, Barbara non è triste: il parlante ha mentito
 - Andrea non parte, Barbara è triste: il parlante non ha mentito, quindi ha detto il vero
 - Andrea non parte, Barbara non è triste: il parlante non ha mentito, quindi ha detto il vero



Condizioni di verità del condizionale

- Quindi un condizionale (materiale) è falso se l'antecedente è vero e il conseguente è falso, ed è vero in caso contrario
- Abbiamo la seguente tavola di verità del condizionale (materiale):

α	β	$[\alpha \rightarrow \beta]$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Il bicondizionale

- Il bicondizionale di due formule si ottiene ponendo il simbolo \leftrightarrow fra le formule, racchiuse da una coppia di parentesi quadre:
 $[Triste(Barbara) \leftrightarrow Parte(Andrea)]$
Barbara è triste se, e solo se, Andrea parte
- Il bicondizionale può essere visto come la congiunzione di due condizionali in senso opposto:
 $[[Parte(Andrea) \rightarrow Triste(Barbara)]$
 $\wedge [Triste(Barbara) \rightarrow Parte(Andrea)]]$
- In questo corso ci occupiamo solo del bicondizionale materiale, definito come la congiunzione di due condizionali materiali in senso opposto



Condizioni di verità del bicondizionale

- Un bicondizionale (materiale) $[\alpha \leftrightarrow \beta]$ è vero se gli enunciati α e β hanno lo stesso valore di verità ed è falso in caso contrario
- Quindi abbiamo la seguente tavola di verità del bicondizionale (materiale):

α	β	$[\alpha \leftrightarrow \beta]$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Il bicondizionale ci dà un modo più semplice per esprimere la disgiunzione esclusiva (*xor*):
[Piove \leftrightarrow \neg FaFreddo]



Valutazione di una formula complessa

- Valutare una formula significa calcolare il suo valore di verità in un mondo del discorso
- Consideriamo ad esempio la formula
[Inverno() \rightarrow [Piove() \vee Nevica()]]
e supponiamo che nel mondo del discorso *sia inverno, non piova e nevichi*
- Per la valutazione basta utilizzare le tavole di verità viste in precedenza (per brevità le costanti predicative sono qui rappresentate con la sola iniziale):

I	P	N	$[P \vee N]$	$[I \rightarrow [P \vee N]]$
1	0	1	1	1



- Due formule α e β pur essendo diverse possono risultare equivalenti, nel senso che le loro condizioni di verità sono le stesse (ovvero risultano ambedue vere o ambedue false negli stessi casi)
- Ecco alcune equivalenze importanti:
 - $\neg\neg\alpha$ equivale a α
 - $\neg[\alpha \wedge \beta]$ equivale a $[\neg\alpha \vee \neg\beta]$
 - $\neg[\alpha \vee \beta]$ equivale a $[\neg\alpha \wedge \neg\beta]$
 - $[\alpha \rightarrow \beta]$ equivale a $[\neg\alpha \vee \beta]$
 - $\neg[\alpha \rightarrow \beta]$ equivale a $[\alpha \wedge \neg\beta]$
- Queste equivalenze si dimostrano facilmente utilizzando le tavole di verità



- Dimostriamo ad esempio che:
 $[\alpha \rightarrow \beta]$ equivale a $[\neg\alpha \vee \beta]$
- Utilizzando le tavole di verità abbiamo che:

α	β	$[\alpha \rightarrow \beta]$	$\neg\alpha$	$[\neg\alpha \vee \beta]$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1



- Connettivi booleani
- Tavole di verità
- Valutazione di una formula complessa
- Equivalenza di due formule