4. L’uguaglianza

Sommario

- Nelle lezioni precedenti abbiamo definito un certo numero di termini logici (connettivi, quantificatori) che sono anche operatori logici
- In questa lezione ci occuperemo di un termine logico che non è un operatore logico, bensì una costante predicativa speciale: l’uguaglianza

  Introdurremo inoltre nuovi operatori logici, tutti riducibili agli operatori già definiti e all’uguaglianza

L’uguaglianza

- La copula del linguaggio ordinario (*è*) può essere usata con funzioni diverse
- Nei casi considerati fino ad ora la copula indicava l’applicazione di un predicato a un argomento

  Andrea è biondo

  Biondo(Andrea)
- Nel caso seguente, invece, la copula esprime uguaglianza o identità:

  la Gioconda è la Monna Lisa

  Gioconda = MonnaLisa

L’uguaglianza (2)

- Più precisamente, la formula

  Gioconda = MonnaLisa

  dice che le due costanti individuali Gioconda e MonnaLisa sono coreferenziali, ovvero fanno riferimento allo stesso individuo del mondo del discorso
- Non sarebbe corretto dire che la formula esprime l’identità di due individui: ci sono sì due termini referenziali (le costanti individuali Gioconda e MonnaLisa), ma un solo individuo (il famoso quadro) che è il referente di ambedue i termini nel mondo del discorso

Costante predicativa e termine logico

- Il simbolo = di uguaglianza è una costante predicativa a due posti d'argomento

  Seguendo le regole della nostra grammatica dovremmo quindi scrivere formule del tipo

  $=(x,y)$

- In omaggio alla notazione tradizionale si usa invece la "notazione infissa"

  $(x = y)$ oppure $x = y$

  Si scrive inoltre

  $(x \neq y)$ oppure $x \neq y$

  anziché $\neg(x = y)$

- Attenzione: l'uguaglianza è sia un termine predicativo (una costante predicativa), sia un termine logico (come i connettivi e i quantificatori)

Condizioni di verità

- Una formula ($R_1 = R_2$), formata dalla costante predicativa diàdica = applicata a due termini referenziali R_1 ed R_2, è vera se R_1 ed R_2 hanno lo stesso referente nel mondo del discorso ed è falsa in caso contrario

- Ad esempio, la formula atomica

  Gioconda = MonnaLisa

  è vera se nel mondo del discorso la costante individuale Gioconda e la costante individuale MonnaLisa hanno lo stesso referente

III-4
6

Esistenza e unicità

- Utilizzando l'uguaglianza e altri termini logici è possibile esprimere il concetto di esistenza e unicità
- Ad esempio, l'enunciato

  c'è un solo cubo o *esiste esattamente un cubo*

  si può trasformare in

  esiste (almeno) un x tale che:
  x è un cubo e per ogni y:
  se (anche) y è un cubo, allora y è uguale a x

  ovvero

  $\exists x\, [\mathrm{Cubo}(x) \wedge \forall y\, [\mathrm{Cubo}(y) \rightarrow (y = x)]]$

  Nel seguito abbrevieremo questa formula come

  $=1x\ \mathrm{Cubo}(x)$ (oppure $\exists! x\ \mathrm{Cubo}(x)$)

III-4
7

Quantificatori numericamente delimitati

- L'enunciato

  ci sono almeno due cubi

  si può trasformare in

  esiste (almeno) un x e (almeno) un y tali che:
  x è un cubo e y è un cubo e x ≠ y

  ovvero

  $\exists x\, \exists y\, [\mathrm{Cubo}(x) \wedge [\mathrm{Cubo}(y) \wedge (x \neq y)]]$

  che abbrevieremo in

  $\geq 2x\ \mathrm{Cubo}(x)$

III-4
8

Quantificatori numericamente delimitati (2)

- Più in generale utilizzando l'uguaglianza e altri termini logici è possibile scrivere formule che esprimono tutti i quantificatori esistenziali numericamente delimitati
- Per le abbreviazioni useremo i simboli:

  $\leq n$x ... *esistono al massimo n x tali che ...*

  $\geq n$x ... *esistono almeno n x tali che ...*

  $=n$x ... *esistono esattamente n x tali che ...*

  con *n* = 0, 1, 2, ... qualsiasi

III-4
9

Quantificatori numericamente delimitati (3)

- Ecco alcuni esempi di uso dei quantificatori esistenziali numericamente delimitati:

  ogni mese ha al massimo trentun giorni

  $\forall$x [Mese(x) $\rightarrow$ $\leq$31y GiornoDi(y,x)]

  ogni mese ha almeno ventotto giorni

  $\forall$x [Mese(x) $\rightarrow$ $\geq$28y GiornoDi(y,x)]

  ogni settimana ha esattamente sette giorni

  $\forall$x [Settimana(x) $\rightarrow$ =7y GiornoDi(y,x)]

III-4
10

Descrizioni definite

- Consideriamo l’enunciato

    il figlio di Barbara è biondo

- Utilizzando quanto sappiamo già possiamo scrivere parzialmente la formula:

    Biondo(*il figlio di* Barbara)

- Utilizzando una variabile x e la costante predicativa FiglioDi possiamo fare un passo ulteriore:

    Biondo(*l’ x tale che* FiglioDi(x,Barbara))

- L’espressione

    l’ x tale che ...

    si rappresenta con l’operatore logico

    Ix ... (oppure ιx ..., dove ι è la lettera “iota” minuscola dell’alfabeto greco)

III-4
11

Descrizioni definite (2)

- Quindi la frase

    il figlio di Barbara è biondo

    si traduce con la formula

    Biondo(Ix FiglioDi(x,Barbara))

- L’espressione

    Ix FiglioDi(x,Barbara),

    detta descrizione definita, è un termine referenziale complesso che contiene come componente la formula atomica

    FiglioDi(x,Barbara)

- *Come tutti gli altri termini referenziali (ad es. le costanti individuali), una descrizione definita viene utilizzata come argomento di costanti predicative*

III-4
12

Descrizioni definite (3)

- Ci possiamo chiedere se anche le descrizioni definite, come i quantificatori esistenziali numericamente delimitati, possano essere ridotte ai simboli che conosciamo già (connettivi, quantificatori, uguaglianza)
- Secondo un'analisi proposta da Bertrand Russell (1905) la formula

  Biondo(Ix FiglioDi(x,Barbara))

  può essere considerata come l'abbreviazione di

  c'è esattamente un figlio di Barbara,
  e ogni figlio di Barbara è biondo

  ovvero:

  $[=1x\ \text{FiglioDi}(x,\text{Barbara})$
  $\wedge\ \forall x\ [\text{FiglioDi}(x,\text{Barbara}) \rightarrow \text{Biondo}(x)]]$

III-4
13

Descrizioni definite (4)

- Attenzione: dire che *esiste esattamente un figlio di Barbara* non significa affermare che Barbara non abbia altri figli, ma soltanto affermare che esiste esattamente un figlio di Barbara nel mondo del discorso
- Quindi l'enunciato

  il figlio di Barbara è biondo
  Biondo(Ix FiglioDi(x,Barbara))

  è vero anche se Barbara ha due figli, ad esempio uno biondo e l'altro bruno, purché il mondo del discorso contenga soltanto il primo!

III-4
14

Descrizioni indefinite

- Se *il figlio di Barbara* è una descrizione definita, una descrizione indefinita è ad esempio

  un figlio di Barbara

- Solitamente non si introduce una rappresentazione particolare per le descrizioni indefinite e ci si limita a usare il quantificatore esistenziale in modo opportuno

  Esempio:

  un figlio di Barbara è biondo

  $\exists x$ [FiglioDi(x,Barbara) $\wedge$ Biondo(x)]

III-4
15

Concetti importanti

- L'uguaglianza come coreferenzialità di due termini referenziali
- Scrittura infissa dell'uguaglianza
- L'uguaglianza è sia una costante predicativa, sia un termine logico
- Esistenza e unicità
- Quantificatori numericamente delimitati
- Descrizioni definite