



## 5. Il linguaggio predicativo del primo ordine



- Nelle lezioni precedenti abbiamo introdotto tutti gli elementi che formano un particolare tipo di linguaggio logico, denominato linguaggio predicativo del primo ordine
- In questa lezione specifichiamo questo linguaggio in modo più sistematico e analizziamo la struttura delle sue formule



- Il linguaggio logico definito nelle lezioni precedenti prende il nome di linguaggio predicativo del primo ordine o più semplicemente linguaggio del primo ordine (FOL, da First Order Language)
- Il dizionario di FOL prevede quattro tipi di simboli:
  - simboli referenziali: le costanti individuali e le variabili individuali ( $x, y, z, \dots$ )
  - simboli predicativi: le costanti predicative, l'uguaglianza
  - simboli logici: i connettivi booleani, il quantificatore esistenziale, il quantificatore universale, l'uguaglianza
  - simboli strutturali: le parentesi tonde e quadre, la virgola



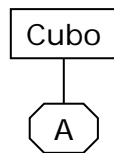
- Utilizzando i simboli e seguendo le regole di una ben precisa grammatica si formano vari tipi di espressioni:
  - termini referenziali: sono i simboli referenziali e le descrizioni definite
  - formule atomiche: sono costituite da una costante predicativa seguita da espressioni referenziali (delimitate dalle parentesi tonde e separate fra loro da virgole), in numero pari al numero di posti d'argomento della costante predicativa
  - formule complesse: sono formate a partire dalle formule atomiche utilizzando connettivi e quantificatori (con l'uso delle parentesi quadre quando necessario)



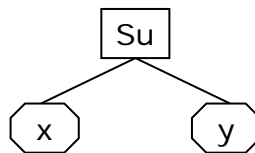
## L'albero di una formula

- Le formule hanno una struttura che può essere messa in luce utilizzando un albero sintattico
- Il caso più semplice è dato dalle formule atomiche (ovvero prive di operatori logici)
  - la costante predicativa compare come radice dell'albero
  - gli argomenti compaiono come successori della radice:

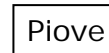
Cubo(A)



Su(x,y)

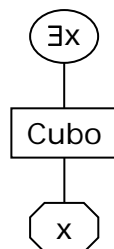
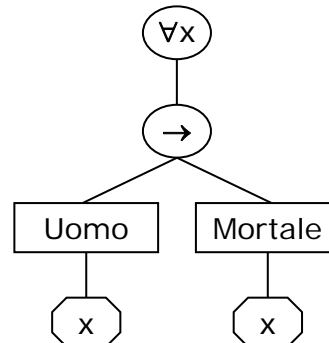


Piove



## L'albero di una formula (2)

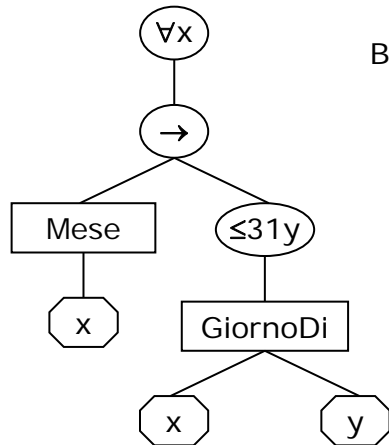
- Nelle formule complesse gli operatori (i connettivi, i quantificatori, l'operatore I) compaiono come nodi dell'albero:

 $\exists x \text{Cubo}(x)$  $\forall x [\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x)]$ 

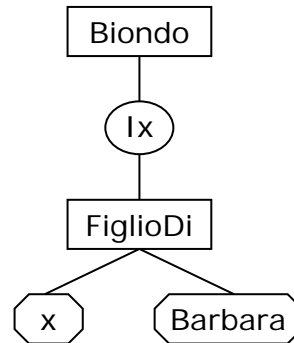


■ Altri esempi:

$$\forall x [Mese(x) \rightarrow \leq 31y \text{GiornoDi}(y,x)]$$

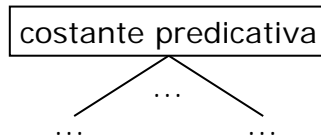


$$\text{Biondo}(\text{Ix FiglioDi}(x, \text{Barbara}))$$



■ C'è una relazione stretta fra la forma di un albero e le parentesi della formula corrispondente:

- ogni nodo del tipo riportato qui sotto dà luogo a una coppia di parentesi tonde (con eventuali virgole che separano gli argomenti della costante predicativa)



- ogni nodo del tipo riportato qui sotto dà luogo a una coppia di parentesi quadre





## Eliminazione delle parentesi superflue

- In algebra esistono convenzioni che consentono di rimuovere certe coppie di parentesi superflue, ad es.:

$$4 + (5 \times 3) \longrightarrow 4 + 5 \times 3$$

- Regole analoghe vengono adottate in logica per l'eliminazione di parentesi quadre superflue:

- regola 1: è sempre possibile rimuovere un'eventuale coppia di parentesi quadre esterna alla formula:

$$[[\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A)] \longrightarrow [\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A)$$

- regola 2: è possibile rimuovere coppie di parentesi tenendo conto del fatto che, per convenzione,  $\wedge$  e  $\vee$  "legano più fortemente" di  $\rightarrow$  e  $\leftrightarrow$ :

$$[\neg P \wedge Q] \rightarrow R(A) \longrightarrow \neg P \wedge Q \rightarrow R(A)$$



## Eliminazione delle parentesi superflue (2)

- regola 3: se lo stesso connettivo binario è utilizzato più volte di seguito, per convenzione le parentesi vanno inserite da destra verso sinistra:

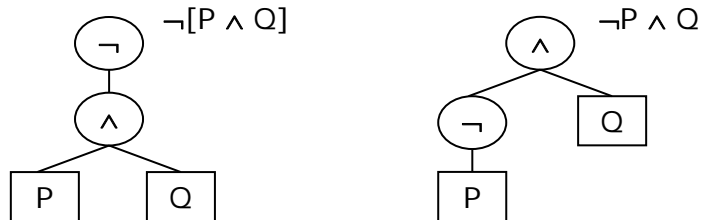
$$\neg P \wedge [Q \wedge R(A)] \longrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R(A)$$

$$\neg P \rightarrow [Q \rightarrow R(A)] \longrightarrow \neg P \rightarrow Q \rightarrow R(A)$$



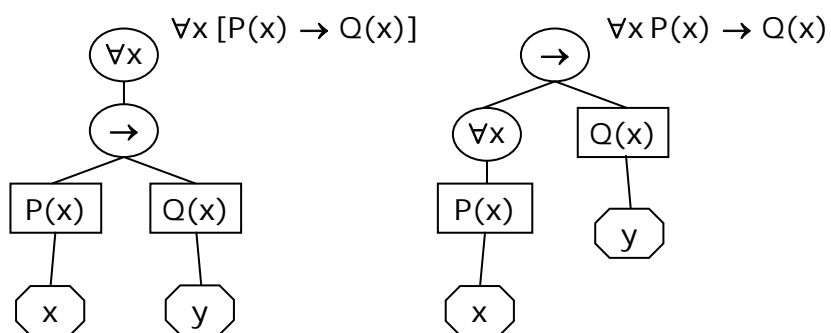
### Eliminazione delle parentesi superflue (3)

- Certe coppie di parentesi non possono essere eliminate, altrimenti cambia la struttura della formula:



### Eliminazione delle parentesi superflue (4)

- Certe coppie di parentesi non possono essere eliminate, altrimenti cambia la struttura della formula:





- Dato un mondo del discorso possiamo valutare una formula qualsiasi, ovvero stabilire se la formula è vera o falsa nel mondo del discorso, tenendo conto:
  - delle condizioni di verità delle formule atomiche (III-1)
  - delle condizioni di verità delle formule formate con i connettivi booleani, definite tramite le tavole di verità (III-2)
  - delle condizioni di verità delle formule formate con i quantificatori (III-3)
  - delle condizioni di verità dell'uguaglianza (III-4)
  - della riducibilità degli altri termini logici (quantificatori numericamente delimitati, descrizioni definite) ai termini logici già noti (III-4)



- La maggior parte delle formule viste finora sono formule chiuse, nel senso che tutte le occorrenze di variabili sono legate da un operatore logico (quantificatori, I)
- Importante: traducendo enunciati del linguaggio ordinario si ottengono sempre formule chiuse!
- Dal punto di vista formale sono corrette anche le formule aperte, in cui vi sono occorrenze di variabili libere, ovvero non legate da un operatore, come
$$P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)$$
- Le formule aperte possono comparire come parte di una formula chiusa; ad es. la formula aperta riportata qui sopra compare come parte della formula chiusa
$$\forall x [P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)]$$



## Formule chiuse e formule aperte (2)

- Come abbiamo detto, traducendo enunciati del linguaggio ordinario si ottengono sempre formule chiuse (ovvero prive di occorrenze libere di variabili)
  - Ciò non significa che ogni enunciato del linguaggio ordinario sia traducibile nel linguaggio logico del primo ordine: diciamo quindi, più precisamente, che ogni enunciato del linguaggio ordinario che sia traducibile in FOL può essere rappresentato con una formula FOL chiusa
- Viceversa, ogni formula FOL chiusa corrisponde a un enunciato del linguaggio ordinario
- Per questo motivo in logica è d'uso chiamare *enunciati* le formule chiuse, considerandole a tutti gli effetti come un modello formale degli enunciati del linguaggio ordinario



## Simboli primitivi ed estensioni definitorie

- Abbiamo definito FOL come il linguaggio simbolico comprendente:
  - costanti predicative
  - costanti e variabili individuali
  - i simboli logici  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, =$
- Abbiamo poi arricchito FOL di altri simboli logici, ottenendo così un'estensione definitoria del linguaggio precedentemente specificato; i simboli logici aggiuntivi, tutti riducibili ai simboli logici già noti, sono:
  - $\leq n, \geq n, =n, \perp$
- Ci possiamo ora chiedere se i simboli  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, =$  sono tutti primitivi (ovvero non riducibili l'uno all'altro), o se invece possono essere ridotti a un insieme più limitato di simboli





- In effetti è possibile definire FOL assumendo soltanto quattro simboli logici primitivi, ad esempio

$$\neg, \wedge, \forall \text{ e } =,$$

e introdurre gli altri simboli logici tramite definizioni

- Utilizzando  $\neg$ ,  $\wedge$  e  $\forall$  si definiscono  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  e  $\exists$ :

$$\alpha \vee \beta =_{\text{def}} \neg[\neg\alpha \wedge \neg\beta]$$

$$\alpha \rightarrow \beta =_{\text{def}} \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta =_{\text{def}} [\alpha \rightarrow \beta] \wedge [\beta \rightarrow \alpha]$$

$$\exists x \alpha =_{\text{def}} \neg\forall x \neg\alpha$$

- Per la definizione degli altri simboli logici ( $\leq n$ ,  $\geq n$ ,  $=n$ ,  $!$ ), per i quali si utilizza anche l'uguaglianza, si veda la lezione III-4



- FOL: linguaggio predicativo del primo ordine (o linguaggio del primo ordine)
- Dizionario dei simboli: simboli logici, simboli predicativi, simboli referenziali, simboli strutturali
- Grammatica: termini referenziali, formule atomiche, formule complesse
- Struttura delle formule e alberi sintattici
- Regole per l'eliminazione delle parentesi superflue
- Formule aperte e formule chiuse, traducibilità degli enunciati del linguaggio ordinario in formule chiuse
- Simboli primitivi e simboli riducibili; estensioni definitorie
- I quattro simboli logici primitivi di FOL