



## 2. La deduzione



- Nella lezione precedente abbiamo definito il concetto di forma logica e l'abbiamo utilizzato per classificare le formule in tre categorie logiche: logicamente vere (cioè vere in ogni possibile mondo del discorso), logicamente false (cioè false in ogni possibile mondo del discorso) e contingenti (cioè vere in certi mondi del discorso e false in altri)

- In questa lezione vedremo che la forma logica può anche dar conto anche della validità di un'inferenza deduttiva o deduzione

Esistono altri tipi di inferenza, come l'abduzione e l'induzione, di cui però non ci occuperemo in questo corso



- Un'inferenza è un ragionamento in cui un enunciato, detto conclusione, viene ricavato a partire da altri enunciati, detti premesse
- In generale un'inferenza ha la forma seguente:

*premessa 1,*  
*premessa 2,*  
*...*  
*premessa N,*  
*∴ conclusione*

dove  $\therefore$  è un simbolo metalinguistico, che rappresenta il connettivo non booleano *quindi* ed è utilizzato per indicare la conclusione



- Ci sono inferenze di tipo diverso, e in particolare:
  - l'inferenza deduttiva o deduzione
  - l'inferenza abduttiva o abduzione
  - l'inferenza induttiva o induzione
- La deduzione è l'unico tipo d'inferenza che permette di passare dalle premesse alla conclusione con assoluta certezza

Per questo motivo la deduzione è alla base del ragionamento matematico e costituisce un oggetto di studio d'importanza centrale per la logica



- Il testo seguente descrive una deduzione:
  - (1) *Tutti gli svizzeri sono puntuali*  
*Andrea non è puntuale*  
*∴ Andrea non è svizzero*
- Questa deduzione appare valida, nel senso che, almeno intuitivamente, la conclusione discende logicamente dalle premesse
- Invece la deduzione seguente non sembra valida, nel senso che, sempre intuitivamente, la conclusione non discende logicamente dalle premesse:
  - (2) *Tutti gli svizzeri sono puntuali*  
*Andrea è puntuale*  
*∴ Andrea è svizzero*



- Una deduzione si dice valida se, e solo se, la conclusione discende logicamente dalle premesse
  - Per definizione, poi, un enunciato  $\beta$  discende logicamente dagli enunciati  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  se, e solo se:
    - *in ogni mondo del discorso in cui  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  siano tutti veri, è certamente vero anche  $\beta$*
- Quando un enunciato  $\beta$  discende logicamente dagli enunciati  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  si dice anche che  $\beta$  è conseguenza logica di  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  (in inglese:  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  entail  $\beta$ )
- Dunque una deduzione è valida se, e solo se, la sua conclusione è certamente vera in ogni mondo del discorso in cui siano vere tutte le sue premesse



- Nel metalinguaggio della logica, con

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N \models \beta$$

si indica che  $\beta$  discende logicamente da  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ , e con

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N \not\models \beta$$

si indica che  $\beta$  non discende logicamente da  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$

- NOTA: le formule sono separate dalla virgola “,” che in questo caso è un simbolo metalinguistico e non va confusa con la virgola che separa gli argomenti di un termine predicativo.



- La deduzione (1) è valida perché:
  - ammettendo che nel mondo del discorso sia vero che *tutti gli svizzeri sono puntuali* e che *Andrea non è puntuale ...*
  - ... allora, sempre nello stesso mondo del discorso, è certamente vero che *Andrea non è svizzero* perché, se lo fosse, grazie alla prima premessa sarebbe puntuale
- La deduzione (2) non è valida (è invalida) perché:
  - anche se nel mondo del discorso è vero che *tutti gli svizzeri sono puntuali* e che *Andrea è puntuale ...*
  - ... nello stesso mondo del discorso è possibile che *Andrea non sia svizzero* (potrebbe essere inglese, ad esempio, ed essere lo stesso puntuale)



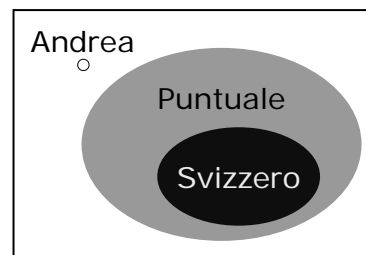
- Attenzione: dire che una deduzione è valida non significa dire che la conclusione è senz'altro vera!  
*Piuttosto significa dire che la conclusione è senz'altro vera nell'ipotesi che siano vere le premesse*
- Se anche una sola premessa di una deduzione valida è falsa, nulla si può dire sulla verità della conclusione  
*Ad esempio, se non è vero che tutti gli svizzeri sono puntuali, oppure se non è vero che Andrea non è puntuale, nulla si può dire sulla verità della conclusione*  
*Andrea non è svizzero*  
benché la deduzione (1) sia valida



- Come ora mostreremo, la validità di una deduzione dipende soltanto dalla sua forma logica
- Iniziamo traducendo l'argomentazione (1) in FOL:  
$$\forall x [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)],$$
$$\neg \text{Puntuale}(\text{Andrea})$$
$$\therefore \neg \text{Svizzero}(\text{Andrea})$$
- Per definizione questa deduzione sarà valida se, e solo se,  
$$\forall x [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)],$$
$$\neg \text{Puntuale}(\text{Andrea})$$
$$\models \neg \text{Svizzero}(\text{Andrea})$$



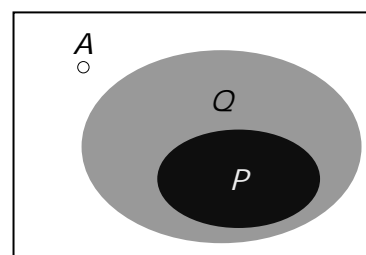
- Ora ragioniamo aiutandoci con un diagramma:
  - in ogni mondo del discorso in cui la prima premessa sia vera, l'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(−) è contenuto nell'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(−)
  - se nel mondo del discorso è vera anche la seconda premessa, il referente di Andrea non appartiene all'insieme degli individui che hanno la proprietà Puntuale(−)
  - ma allora Andrea non può appartenere all'insieme degli individui che hanno la proprietà Svizzero(−), e quindi la conclusione è certamente vera



- Un punto importante è che il nostro ragionamento è indipendente dal significato dei termini Svizzero(−), Puntuale(−) e Andrea
- In altre parole, possiamo ragionare esattamente allo stesso modo per ogni deduzione che abbia la forma

$$\begin{aligned} &\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \\ &\neg Q(A) \\ &\therefore \neg P(A) \end{aligned}$$

- Quindi la validità della (1) dipende solo dalla forma logica dei suoi enunciati e non dal significato dei termini predicativi e referenziali utilizzati

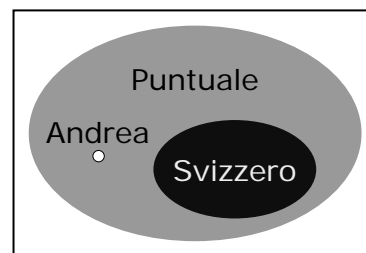




- Ora mostreremo che la deduzione (2) è invalida
- In FOL la (2) diventa:  
 $\forall x [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)],$   
 $\text{Puntuale}(\text{Andrea})$   
 $\therefore \text{Svizzero}(\text{Andrea})$
- La deduzione è invalida se, e solo se,  
 $\forall x [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)],$   
 $\text{Puntuale}(\text{Andrea})$   
 $\not\vdash \text{Svizzero}(\text{Andrea})$
- Come possiamo dimostrare che la conclusione non segue logicamente dalle premesse? Ci basta costruire un **controesempio**, ovvero un mondo del discorso in cui le premesse siano vere e la conclusione sia falsa



- Aiutiamoci ancora con un diagramma:
  - in ogni mondo del discorso in cui la prima premessa sia vera, l'insieme degli individui che hanno la proprietà  $\text{Svizzero}(-)$  è contenuto nell'insieme degli individui che hanno la proprietà  $\text{Puntuale}(-)$
  - perché sia vera anche la seconda premessa basta che il referente di Andrea appartenga all'insieme degli individui che hanno la proprietà  $\text{Puntuale}(-)$
  - ma allora è possibile che Andrea non appartenga all'insieme degli individui che hanno la proprietà  $\text{Svizzero}(-)$ , e quindi la conclusione può essere falsa

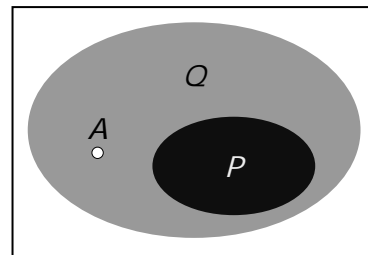




- Anche in questo caso il ragionamento è indipendente dal significato dei termini Svizzero(-), Puntuale(-) e Andrea
- In altre parole possiamo ragionare esattamente allo stesso modo per ogni deduzione che abbia la forma

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)],$$
$$Q(A)$$
$$\therefore P(A)$$

- Quindi l'invalidità della (2) dipende solo dalla forma logica dei suoi enunciati e non dal significato dei termini predicativi e referenziali utilizzati



- Come abbiamo visto, è possibile dimostrare la validità di una deduzione basandosi su ragionamenti di tipo insiemistico
- Tuttavia questo modo di ragionare diventa rapidamente *molto oneroso* non appena la deduzione si fa un po' complessa, in particolare se si utilizzano costanti predicative a più di un posto d'argomento
- L'ideale sarebbe disporre di un calcolo logico, ovvero di una procedura che consenta di dimostrare la validità di una deduzione in modo pressoché automatico:  
Di questo ci occuperemo nella prossima lezione





- Inferenza: premesse, conclusione
- Deduzioni valide e invalide
- Conseguenza logica
- Validità e forma logica
- Costruzione di un controesempio