3. Il calcolo logico

Sommario

- Nella lezione precedente abbiamo introdotto il concetto di deduzione
- In questa lezione vedremo come sia possibile condurre deduzioni valide utilizzando un procedimento *puramente meccanico*, chiamato calcolo logico

Un calcolo del primo ordine

- Il linguaggio del primo ordine ammette calcoli logici di diverso tipo, adatti a scopi differenti, che vengono chiamati calcoli del primo ordine
- In questa lezione descriveremo brevemente uno di questi calcoli, più precisamente il cosiddetto calcolo della deduzione naturale, nella versione presentata da Bencivenga[1]
- Se si utilizza un calcolo, una deduzione consiste nella costruzione di una prova o dimostrazione formale della conclusione a partire dalle premesse
- *Per costruire la prova è consentito usare soltanto un repertorio limitato e prestabilito di regole d'inferenza*, che nel calcolo della deduzione naturale sono una quindicina

1) E. Bencivenga "**Il primo libro di logica: introduzione ai metodi della logica contemporanea**" Bollati Boringhieri, Torino, 1984

Un calcolo del primo ordine (2)

- Una prova è strutturata come una sequenza di righe, ciascuna delle quali contiene tre informazioni:
  - il numero della riga, che consente di identificare una riga della prova senza ambiguità
  - una formula FOL
  - la giustificazione della riga, che giustifica la presenza della riga nella prova in base alle regole d'inferenza del calcolo
- Come primo esempio utilizzeremo il calcolo per provare la validità della deduzione

$\forall x\, [\text{Svizzero}(x) \rightarrow \text{Puntuale}(x)]$,

$\neg\text{Puntuale}(\text{Andrea})$

$\therefore\ \neg\text{Svizzero}(\text{Andrea})$

Una deduzione formale

- Le prime righe della prova elencano le premesse, che nel contesto del calcolo della deduzione naturale vengono usualmente chiamate ipotesi

1.	$\forall x$ [Svizzero(x) $\rightarrow$ Puntuale(x)]	ipotesi
2.	$\neg$Puntuale(Andrea)	ipotesi

- *La linea orizzontale separa le ipotesi dal resto della prova*
- Le righe successive della prova si ottengono utilizzando le regole d'inferenza ammesse dal calcolo

La regola E∀

- Una delle regole d'inferenza del calcolo, detta regola di eliminazione del quantificatore universale (**E**∀) o *regola di esemplificazione*, dice che:
  - se in una riga della prova compare una formula della forma $\forall x\, \alpha$ (dove x è una variabile qualsiasi) ...
  - ... si può creare una nuova riga con la formula ottenuta eliminando il quantificatore universale $\forall x$ e rimpiazzando ogni occorrenza della variabile x in α con una costante A qualsiasi
- Rappresentazione concisa della regola:

n.	$\forall x\, \alpha$	
	...	
m.	$\alpha\{A/x\}$	E∀(*n*)

(dove *A* è una costante qualsiasi)

L'applicazione di E∀

- La regola E∀ consente di aggiungere una nuova riga alla prova:

1.	$\forall x$ [Svizzero(x) $\rightarrow$ Puntuale(x)]	ipotesi
2.	$\neg$Puntuale(Andrea)	ipotesi
3.	Svizzero(Andrea) $\rightarrow$ Puntuale(Andrea)	E∀(1)

- La giustificazione E∀(1) significa che la riga 3 è stata ottenuta applicando la regola E∀ alla formula della riga 1

  Il quantificatore $\forall x$ è stato eliminato e ogni occorrenza della variabile x nella formula è stata rimpiazzata dalla costante Andrea

Introdurre un'ipotesi supplementare

- In qualunque punto della prova si può introdurre un'ipotesi supplementare, che dovrà poi essere "scaricata" prima della fine della prova
- Ogni ipotesi supplementare dà luogo a una sottoprova, incassata nella prova più esterna

1.	$\forall x$ [Svizzero(x) $\rightarrow$ Puntuale(x)]	ipotesi
2.	$\neg$Puntuale(Andrea)	ipotesi
3.	Svizzero(Andrea) $\rightarrow$ Puntuale(Andrea)	E∀(1)
4.	| Svizzero(Andrea)	ipotesi

  - Si legge: ... supponiamo per assurdo che Andrea sia svizzero ...

La regola R

- Un’altra regola d’inferenza del calcolo, detta <u>regola di ricopiatura</u> (**R**), dice che:
  - se in una riga di una prova compare una formula qualsiasi α ...
  - ... si può ricopiare α in una sottoprova più interna
- Rappresentazione concisa:

n.	α		
	…		
		…	
		…	
m.		α	R(*n*)

L’applicazione di R

- Utilizziamo la regola R per aggiungere due nuove righe alla prova:

1.	∀x [Svizzero(x) → Puntuale(x)]		ipotesi
2.	¬Puntuale(Andrea)		ipotesi
3.	Svizzero(Andrea) → Puntuale(Andrea)		E∀(1)
4.		Svizzero(Andrea)	ipotesi
5.		Svizzero(Andrea) → Puntuale(Andrea)	R(3)
6.		¬Puntuale(Andrea)	R(2)

La regola E→

- Un'altra regola d'inferenza del calcolo, detta <u>regola di eliminazione del condizionale</u> (**E→**) o regola di *modus ponens*, dice che:
  - se in una riga della prova compare una formula della forma $\alpha \to \beta$ ...
  - ... e in un'altra riga della prova compare la formula α ...
  - ... si può creare una nuova riga della prova contenente la formula β
- Rappresentazione concisa:

n.	$\alpha \to \beta$	
	...	
n'.	α	
	...	
m.	β	E→(*n*,*n'*)

L'applicazione di E→

- La regola E→ consente di aggiungere una nuova riga alla prova:

1.	∀x [Svizzero(x) → Puntuale(x)]	ipotesi
2.	¬Puntuale(Andrea)	ipotesi
3.	Svizzero(Andrea) → Puntuale(Andrea)	E∀(1)
4.	Svizzero(Andrea)	ipotesi
5.	Svizzero(Andrea) → Puntuale(Andrea)	R(3)
6.	¬Puntuale(Andrea)	R(2)
7.	Puntuale(Andrea)	E→(5,4)

La regola I¬

- Un’altra regola d’inferenza del calcolo, detta <u>regola di introduzione della negazione</u> (**I**¬) o regola della contraddizione, dice che:
  - se in una sottoprova generata da un’ipotesi supplementare α ...
  - ... si ha una riga contenente una formula β ...
  - ... e un’altra riga contenente una formula $\neg\beta$ ...
  - ... è possibile chiudere la sottoprova e ritornare alla prova immediatamente più esterna creando una nuova riga con la formula $\neg\alpha$
    - Ovvero si è dimostrato che l’ipotesi non sussiste e quindi sussiste la sua negazione.
- Questo modo di ragionare corrisponde al ben noto metodo di *dimostrazione per assurdo*

La regola I¬ (2)

- Rappresentazione concisa:

$$
\begin{array}{lll}
 & \vert\ \underline{\alpha} & \\
 & \vert\ \dots & \\
n. & \vert\ \beta & \\
 & \vert\ \dots & \\
n'. & \vert\ \neg\beta & \\
m. & \neg\alpha & \mathrm{I}\neg(n,n')
\end{array}
$$

L’applicazione di I¬

- La regola I¬ consente di aggiungere una nuova riga alla prova:

1.	$\forall x$ [Svizzero(x) $\rightarrow$ Puntuale(x)]	ipotesi
2.	¬Puntuale(Andrea)	ipotesi
3.	Svizzero(Andrea) $\rightarrow$ Puntuale(Andrea)	E$\forall$(1)
4.	Svizzero(Andrea)	ipotesi
5.	Svizzero(Andrea) $\rightarrow$ Puntuale(Andrea)	R(3)
6.	¬Puntuale(Andrea)	R(2)
7.	Puntuale(Andrea)	E$\rightarrow$(5,4)
8.	¬Svizzero(Andrea)	I¬(7,6)

Fine della prova

- A questo punto abbiamo dimostrato che dalle premesse

  $\forall x$ [Svizzero(x) $\rightarrow$ Puntuale(x)],
  ¬Puntuale(Andrea)

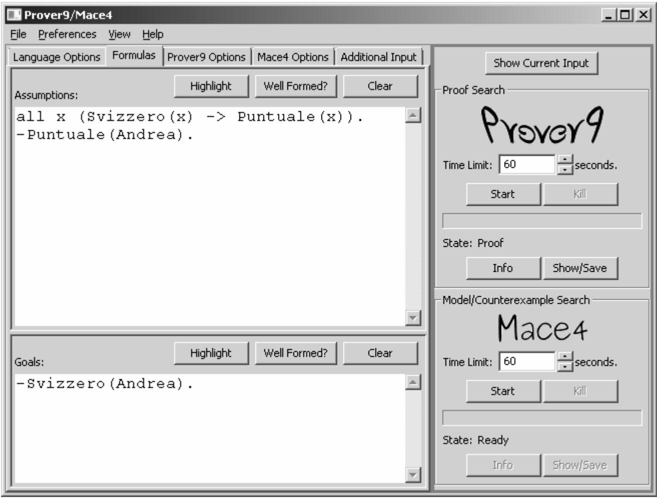
  è possibile giungere alla conclusione

  $\therefore$ ¬Svizzero(Andrea)

  utilizzando soltanto le regole d’inferenza consentite dal calcolo

  La prova è quindi terminata

Il calcolo può essere automatizzato



http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9

La prova calcolata da Prover9

1. (all x (Svizzero(x) -> Puntuale(x))). [assumption].
2. (-Svizzero(Andrea)). [goal].
3. Svizzero(Andrea). [deny(2)].
4. -Svizzero(x) | Puntuale(x). [clausify(1)].
5. Puntuale(Andrea). [resolve(3,a,4,a)].
6. -Puntuale(Andrea). [assumption].
7. $F. [resolve(5,a,6,a)].

- Anche Prover9 ha dimostrato che la deduzione è valida con una prova per assurdo.
- NOTA: La prova è scritta in modo diverso da quello mostrato nelle slide precedenti e segue anche un procedimento leggermente differente

Un dubbio che può sorgere

- È sufficiente che la prova termini per garantire che la deduzione sia valida?

Proprietà del calcolo: la correttezza

- La funzione di un calcolo è di costruire meccanicamente deduzioni valide

  La prima proprietà che si desidera da un calcolo, dunque, è la **correttezza** (*soundness*):
  - un calcolo si dice corretto se, e solo se, tutte le deduzioni che costruisce sono valide, ovvero portano dalle premesse iniziali a conclusioni che discendono logicamente dalle premesse (nel senso definito nel lucido IV-2:5)
- È abbastanza facile dimostrare che il calcolo della deduzione naturale è corretto (vedi Bencivenga 1984)

Proprietà del calcolo: la completezza

- Un'altra proprietà che si desidera da un calcolo è che sia in grado di costruire tutte le possibili deduzioni valide che siano esprimibili nel linguaggio simbolico che si utilizza
- Un calcolo per FOL si dice **completo** se, e solo se, consente di costruire una prova per ogni deduzione valida che sia esprimibile in FOL
- La dimostrazione della completezza di un calcolo è un'impresa impegnativa, che per FOL riuscì per la prima volta a Kurt Gödel (1930)
- Il calcolo della deduzione naturale è completo per FOL (vedi Bencivenga 1984)

La decidibilità

- C'è infine una terza proprietà che sarebbe assai desiderabile: la **decidibilità**
- Un linguaggio logico è detto decidibile se esiste una procedura (detta procedura di decisione) che, assegnate le premesse e una possibile conclusione,
  - consente sempre di stabilire, dopo un numero finito di passi, se la conclusione è deducibile dalle premesse oppure non lo è
- Attenzione: di per sé un calcolo non costituisce una procedura di decisione!

  Infatti, se una conclusione non è deducibile da una premessa è possibile che si proceda all'infinito cercando di costruire una prova che non esiste (non ci sono limiti a priori alla possibile lunghezza di una prova!)

La decidibilità (2)

- Nel 1928 Daniel Hilbert e Wilhelm Ackermann, il primi a sviluppare FOL come sistema logico a sé stante, posero alla comunità dei logici il cosiddetto problema della decisione (*Entscheidungsproblem*):
  - esiste una procedura di decisione per FOL?
- Nel 1936 Alan Turing e Alonzo Church dimostrarono, l'uno indipendentemente dall'altro, che non può esistere una procedura di decisione generale per il linguaggio del primo ordine

  Per arrivare a questo risultato sia Turing, sia Church svilupparono nuove tecniche matematiche (note rispettivamente come la "macchina di Turing" e il "calcolo lambda"), fondando così la teoria della computabilità, che oggi sta alla base dell'informatica teorica

La semidecidibilità

- FOL non è dunque decidibile
- Tuttavia FOL è **semidecidibile**, nel senso che:
  - assegnate delle premesse e una possibile conclusione, se la conclusione è deducibile dalle premesse il calcolo è sempre in grado di costruire una dimostrazione in un numero finito di passi (questa è la completezza del calcolo)
  - assegnate alcune premesse e una possibile conclusione, se la conclusione non è deducibile dalle premesse il calcolo può non essere in grado di stabilirlo in un numero finito di passi (in tal caso il calcolo entrerà in un ciclo infinito tentando di costruire una prova che non esiste)

Concetti importanti

- Calcolo logico, calcolo del primo ordine, calcolo della deduzione naturale
- Prova o dimostrazione, regole d'inferenza
- Righe di una prova: numero della riga, formula, giustificazione
- Ipotesi
- Applicazione di regole d'inferenza
- Ipotesi supplementari e sottoprove
- Correttezza e completezza di un calcolo
- Decidibilità/indecidibilità di un linguaggio logico
- La semidecidibilità di FOL