Parte IV: analisi logica

6. Esempi di analisi

Sommario

- Nelle parti precedenti abbiamo messo a punto un linguaggio formale e un insieme di concetti (forma logica, forma concettuale, contenuto nomologico, contenuto fattuale) su cui ora ci baseremo per condurre un'analisi logica degli enunciati

Analisi logica di un enunciato

- L'analisi logica di un enunciato consiste nello *stabilire le condizioni di verità* dell'enunciato, *mettendo in luce i contributi*:
  - della forma logica dell'enunciato
  - di uno o più schemi concettuali nel cui ambito l'enunciato va considerato
  - delle eventuali assunzioni nomologiche pertinenti
  - degli eventuali aspetti fattuali pertinenti

- Attenzione: in generale la sola analisi logica *non ci consente di stabilire se l'enunciato è vero o falso*: per questo occorre di norma conoscere gli stati di cose che sussistono nel mondo del discorso

Esempio 1

- Consideriamo l'enunciato:

  (1) *o Alice è la madre di Bruno oppure non lo è*

- Introduciamo alcune costanti predicative e individuali:

MadreDi(x,y)	*x è madre di y*
Alice	*Alice*
Bruno	*Bruno*

- Interpretando *o ... oppure ...* come una disgiunzione esclusiva, e ricordando che la disgiunzione esclusiva si può esprimere come $\alpha \leftrightarrow \neg\beta$ (lez. III-2), la traduzione dell'enunciato (1) in FOL è:

  MadreDi(Alice,Bruno) $\leftrightarrow$ $\neg\neg$MadreDi(Alice,Bruno)

  ovvero

  MadreDi(Alice,Bruno) $\leftrightarrow$ MadreDi(Alice,Bruno)

Esempio 1 (2)

- Utilizzando le tabelle di verità di $\leftrightarrow$ si verifica facilmente che la formula

  MadreDi(Alice,Bruno) $\leftrightarrow$ MadreDi(Alice,Bruno)

  è logicamente vera, come ogni formula della forma

  $\alpha \leftrightarrow \alpha$

- Quindi l'enunciato (1) è logicamente vero

  In altre parole, l'enunciato è vero grazie alla sua forma logica, indipendentemente:
  - da qualunque schema concettuale
  - dalla scelta del mondo del discorso
  - dagli stati di cose che sussistono nel mondo del discorso

Esempio 2

- Consideriamo l'enunciato:

  (2) *una circonferenza non è un quadrato*

- Traduzione in FOL:

  Circ(x) x è una circonferenza
  Quad(x) x è un quadrato

  $\forall$x [Circ(x) $\rightarrow \neg$Quad(x)]

- La forma logica dell'enunciato,

  $\forall x\, [P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

  non è sufficiente a garantirne la verità

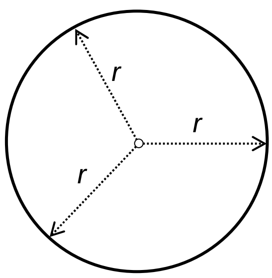
Esempio 2 (2)

- L’enunciato (2) è però vero nell’ambito di un particolare schema concettuale, noto come geometria euclidea, in cui si definiscono i concetti di punto, linea, cerchio, poligono, triangolo, quadrato e così via
- Più precisamente, se accettiamo tutti gli assiomi e le definizioni della geometria euclidea (G.E.) abbiamo

  G.E. $\models \forall x\, [\mathrm{Circ}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Quad}(x)]$
- La verità dell’enunciato è quindi relativa alle convenzioni della geometria euclidea:
  - se adottiamo queste convenzioni l’enunciato è vero
  - se invece adottassimo un diverso sistema di convenzioni, l’enunciato potrebbe risultare falso

Esempio 2 (3)

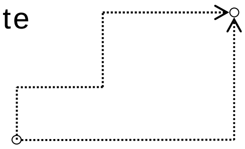
- Che cosa può voler dire in questo caso *adottare un diverso sistema di convenzioni*?
- Una circonferenza è, per definizione,
  - il luogo dei punti del piano che si trovano a una distanza costante (detta raggio della circonferenza) da un determinato punto del piano (detto centro della circonferenza):



Esempio 2 (4)

- Non solo il concetto di circonferenza è convenzionale, ma a sua volta dipende da altri concetti altrettanto convenzionali, come il concetto di distanza
- Che cosa succede, ad esempio, se manteniamo fissa la definizione di circonferenza del lucido precedente, ma cambiamo la definizione di distanza?
- Esistono concetti di distanza diversi da quello classico (detto distanza euclidea): ad esempio, la cosiddetta distanza di Manhattan fra due punti si calcola come la somma degli spostamenti in orizzontale e in verticale necessari per andare da un punto all'altro

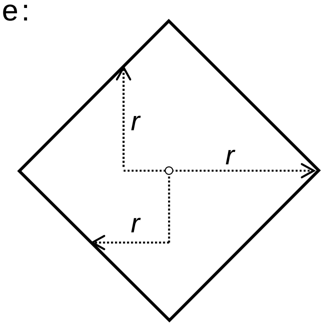
  (la distanza di Manhattan è indipendente dal particolare percorso seguito, purché ci si muova soltanto in orizzontale e in verticale)



Esempio 2 (5)

- Che cosa succede se tracciamo una circonferenza adottando per la distanza la convenzione di Manhattan?

  Ecco che cosa succede:



- In altre parole, adottando la distanza di Manhattan ogni circonferenza appare, almeno a prima vista, quadrata!

Esempio 3

- Analizziamo l'enunciato

  (3) *La pentola scotta perché è sul fuoco*

- Si tratta di un enunciato complesso, contenente il connettivo non booleano *perché*

  L'enunciato rappresenta concisamente un'intera deduzione, con una premessa esplicita, una premessa implicita (ovvero sottintesa) e una conclusione esplicita:

  tutto ciò che è sul fuoco scotta (premessa implicita)
  la pentola è sul fuoco (premessa esplicita)
  ∴ *la pentola scotta* (conclusione esplicita)

Esempio 3 (2)

- Le condizioni di verità dell'enunciato (3) sono più complesse di quanto abbiamo visto nella lezione II-1
- Qui non ci basta che l'enunciato rappresenti uno stato di cose che sussiste nel mondo del discorso

  Infatti possiamo considerare vero l'enunciato (3) se, e soltanto se:
  - la deduzione che rappresenta è valida
  - le premesse della deduzione sono entrambe vere
- La ragione di questa maggiore complessità è la presenza del connettivo non booleano *perché*, che in questo caso esprime un legame deduttivo fra enunciati

Esempio 3 (3)

- In FOL la deduzione completa (compresa le premessa implicita) può essere rappresentata come segue:

  $\forall x$ [SulFuoco(x) $\rightarrow$ Scotta(x)],
  SulFuoco(Pentola),
  $\therefore$ Scotta(Pentola)

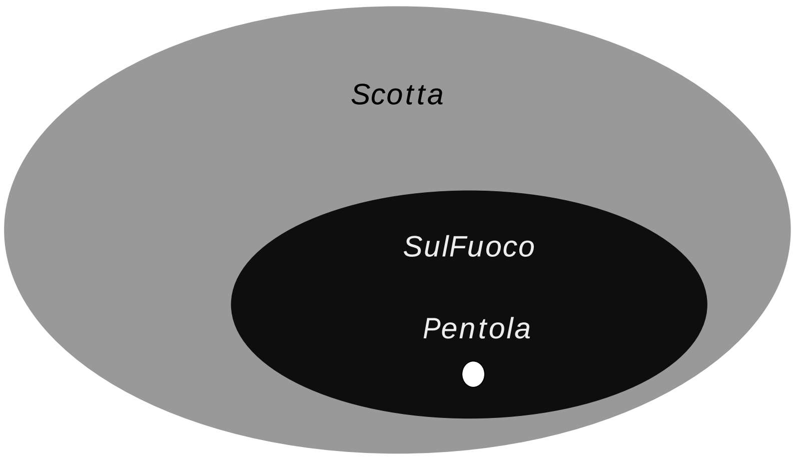
- Possiamo dimostrare che la deduzione completa è valida in quanto abbiamo

  $\forall x$ [SulFuoco(x) $\rightarrow$ Scotta(x)],
  SulFuoco(Pentola),
  $\models$ Scotta(Pentola)

- A questo scopo possiamo
  - ragionare in modo insiemistico (come nella lezione IV-2)
  - o, meglio ancora, usare il calcolo (come nella lezione IV-3)

Esempio 3 (4)

- Ecco la deduzione formale costruita ragionando in modo insiemistico



Esempio 3 (5)

- Ecco la deduzione formale costruita con il calcolo:

1.	$\forall$x [SulFuoco(x) $\rightarrow$ Scota(x)]	ipotesi
2.	SulFuoco(Pentola)	ipotesi
3.	SulFuoco(Pentola) $\rightarrow$ Scota(Pentola)	E$\forall$(1)
4.	Scotta(Pentola)	E$\rightarrow$(3,2)

Esempio 3 (6)

- Dunque la prima condizione di verità del lucido 11 è soddisfatta
- Ora occupiamoci della seconda condizione, ovvero della verità delle premesse, cominciando dalla premessa fattuale

  SulFuoco(Pentola)

  Nel mondo del discorso questo enunciato sarà materialmente vero o materialmente falso, quindi è un enunciato fattuale

  In particolare l'enunciato sarà vero se nel mondo del discorso sussiste lo stato di cose che l'enunciato rappresenta

Esempio 3 (7)

- Ora passiamo alla seconda premessa (implicita), ovvero
  $\forall x$ [SulFuoco(x) $\rightarrow$ Scotta(x)]
- Si tratta di un assioma concettuale che, come tale, è vero per convenzione
- È noto a tutti che in generale qualcosa che è sul fuoco scotta.

Esempio 3 (8)

- Indipendentemente dalla nostra conoscenza diretta del mondo del discorso, possiamo concludere l'analisi dicendo che:
  - l'enunciato (3) rappresenta una deduzione valida, pur di ammettere la presenza della premessa implicita *tutto ciò che è sul fuoco scotta*
  - l'enunciato (3) sarà quindi vero
    - qualora sia vero l'enunciato fattuale *SulFuoco(Pentola)*
    - Inquanto l'assioma concettuale
      $\forall x$ [SulFuoco(x) $\rightarrow$ Scotta(x)]
      è vero per convenzione

Esempio 4

- Analizziamo l'enunciato

  (4) *Bruno ama Alice perché è sua madre*

- Si tratta di un enunciato complesso, contenente il connettivo non booleano *perché*

  L'enunciato rappresenta concisamente un'intera deduzione, con una premessa esplicita, una premessa implicita (ovvero sottintesa) e una conclusione esplicita:

tutti amano la propria madre	(premessa implicita)
Bruno ha madre Alice	(premessa esplicita)
∴ *Bruno ama Alice*	(conclusione esplicita)

Esempio 4 (2)

- Anche le condizioni di verità dell'enunciato (4) sono più complesse di quanto abbiamo visto nella lezione II-1
- Anche in questo caso non ci basta che l'enunciato rappresenti uno stato di cose che sussiste nel mondo del discorso

  Infatti, come abbiamo visto per l'esempio 3, possiamo considerare vero l'enunciato (4) se, e soltanto se:
  - la deduzione che rappresenta è valida
  - le premesse della deduzione sono entrambe vere

- MEMO: La ragione di questa maggiore complessità è la presenza del connettivo non booleano *perché*, che in questo caso esprime un legame deduttivo fra enunciati

Esempio 4 (3)

- In FOL la deduzione completa (compresa le premessa implicita) può essere rappresentata come segue:

  $\forall x \forall y$ [HaMadre(x,y) $\rightarrow$ Ama(x,y)],
  HaMadre(Bruno,Alice),
  $\therefore$ Ama(Bruno,Alice)

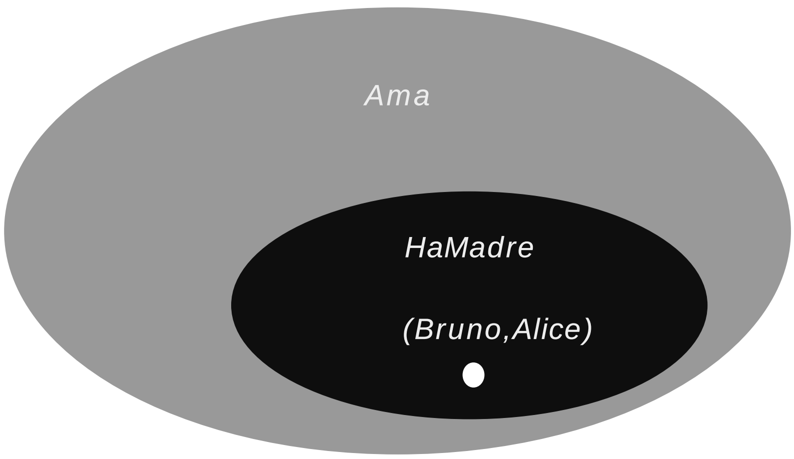
- Possiamo dimostrare che la deduzione completa è valida in quanto abbiamo

  $\forall x \forall y$ [haMadre(x,y) $\rightarrow$ Ama(x,y)],
  HaMadre(Bruno,Alice),
  $\models$ Ama(Alice,Bruno)

- A questo scopo possiamo
  - ragionare in modo insiemistico (come nella lezione IV-2)
  - o, meglio ancora, usare il calcolo (come nella lezione IV-3)

Esempio 4 (4)

- Ecco la deduzione formale costruita ragionando in modo insiemistico



Esempio 4 (5)

- Ecco la deduzione formale costruita con il calcolo (dove A abbrevia Alice e B abbrevia Bruno):

1.	$\forall x \, \forall y$ [HaMadre(x,y) $\rightarrow$ Ama(x,y)]	ipotesi
2.	HaMadre(B,A)	ipotesi
3.	$\forall y$ [HaMadre(B,y) $\rightarrow$ Ama(B,y)]	E$\forall$(1)
4.	HaMadre(B,A) $\rightarrow$ Ama(B,A)	E$\forall$(3)
5.	Ama(B,A)	E$\rightarrow$(4,2)

Esempio 4 (6)

- Dunque la prima condizione di verità del lucido 19 è soddisfatta
- Ora occupiamoci della seconda condizione, ovvero della verità delle premesse, cominciando dalla premessa fattuale

  HaMadre(Bruno,Alice)

  Nel mondo del discorso questo enunciato sarà materialmente vero o materialmente falso, quindi è un enunciato fattuale

  In particolare l’enunciato sarà vero se nel mondo del discorso sussiste lo stato di cose che l’enunciato rappresenta

Esempio 4 (7)

- Ora passiamo alla seconda premessa (implicita), ovvero
  $\forall x \forall y$ [HaMadre(x,y) $\rightarrow$ Ama(x,y)]
- Si tratta di un enunciato nomologico che, come tale, può essere materialmente vero o materialmente falso
- Se lo interpretiamo alla lettera (con il quantificatore che significa proprio *per ogni* e non *generalmente* o *normalmente*), e consideriamo tutta l'umanità come mondo del discorso, l'enunciato è sicuramente falso

  Tuttavia la verità dell'enunciato, come legge generale se non universale, è largamente accettata nella nostra cultura (e presumibilmente in tutte le culture)

Esempio 4 (8)

- Indipendentemente dalla nostra conoscenza diretta del mondo del discorso, possiamo concludere l'analisi dicendo che:
  - l'enunciato (4) rappresenta una deduzione valida, pur di ammettere la presenza della premessa implicita *tutti amano la propria madre*
  - l'enunciato (4) sarà quindi vero qualora siano veri:
    - l'enunciato fattuale *Alice è madre di Bruno*
    - l'enunciato nomologico *tutti amano i propri genitori*

Concetti importanti

- Analisi logica di un enunciato
- Enunciati che rappresentano deduzioni (grazie al connettivo non booleano *perché*)
- Premesse implicite